

數學符號或運算是怎樣發展出來的？

為什麼「 $5+3=8$ 」？

哪一種引入方式比較合理？

①先引入加法算式  $5+3=8$ ，

然後用蘋果的情境說明其義意。

②只引入代數運算，不理會情境。

③先解決 5 個和 3 個合起來有 8 個蘋果，

再用加法算式  $5+3=8$  記錄解題活動。

$$-2^4 = (-2)^4$$

$$-2^4 = -(2)^4$$

教材安排順序有二種基本模式：

- ①學科邏輯：由最基礎的概念開始學習
- ②認知發展：由最具體常見的事物開始引入

哪種教學順序適用於國小？

哪種教學順序適用於高中？

玫瑰花的教學順序

①細胞 ⇨ 根、莖、葉 ⇨ 玫瑰花

②玫瑰花 ⇨ 根、莖、葉 ⇨ 細胞

點、線、面、體的教學順序

①點 ⇨ 線 ⇨ 面 ⇨ 體

②立體形體 ⇨ 平面圖形 ⇨ 邊 ⇨ 頂點

## ◎逐次減項

$$5 + 3 = 8 - 2 = 6$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 3 \\ \hline 8 \\ - 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

你接受上面橫式或直式的記法？

$$5 + 3 = 8 - 2 = 6$$

不接受橫式記法  $\Rightarrow$  等號滿足遞移性

$$5 + 3 = 8, 8 - 2 = 6 \Rightarrow 5 + 3 \neq 6$$

接受直式記法：

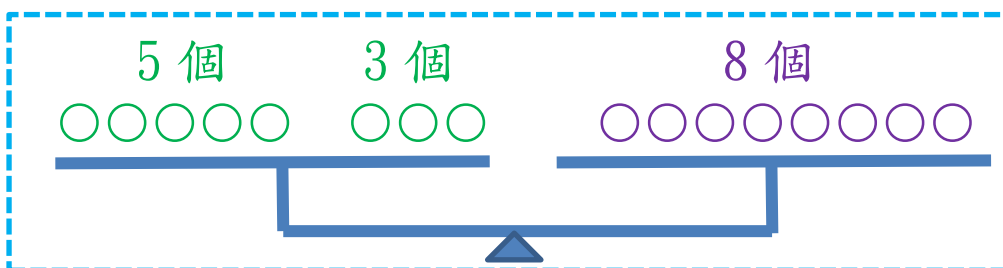
直式中的橫線表示運算的結果。

等號的意義：

甲有 5 個蘋果，乙有 3 個蘋果，兩個人

合起來共有多少個蘋果？  $\Rightarrow$   $5+3=8$

可以用天平溝通算式中等號的意義嗎？

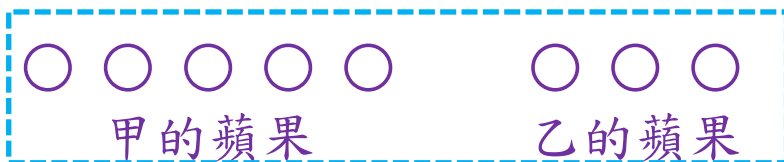


左右兩邊一樣重(個數一樣多)

甲有 5 個蘋果，乙有 3 個蘋果，兩個人

合起來共有多少個蘋果？

學生如何算出答案？



解題只出現 8 個蘋果  $\Rightarrow$  等號是得到答案

天平出現 16 個  $\Rightarrow$  等號是兩邊一樣多(大)

①  $5 + 3 = 8$

②  $8 = 5 + 3$

③  $8 = 8$

④  $5 + 3 = 6 + 2$

◎那些算式是學生不容易接受的？

學生為什麼不接受這些算式？

引入算式  $5 + 3 > 7$

①  $5 + 3$  和  $7$ ，誰比較大？

②  $5 + 3$  和  $7$ ，誰比誰大？

哪一種問法比較恰當？

5+3 和 7，誰比較大？

5+3 比較大  $\Rightarrow$  無法引入不等式

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5+3	7

5+3 和 7，誰比誰大？

5+3 比 7 大  $\Rightarrow$  記成  $5+3 > 7$

5+3	<input type="checkbox"/>	7
-----	--------------------------	---

① 5+3 和 8，誰比誰大？  $\Rightarrow$   $5+3=8$

② 8 和 5+3，誰比誰大？  $\Rightarrow$   $8=5+3$

③ 5+3 和 6+2，誰比誰大？  $\Rightarrow$   $5+3=6+2$

①  $14 \div 3 = 4 \dots 2$

②  $14 = 3 \times 4 + 2$

你喜歡那一種記法?為什麼?

①  $14 \div 3 = 4 \dots 2 \Rightarrow$  等號是得到答案

②  $14 = 3 \times 4 + 2 \Rightarrow$  等號是兩邊一樣大

### 逐次減項的記法

$$\begin{aligned} &5 \times (3 + 8) + 40 \\ &= 5 \times 11 + 40 \\ &= 55 + 40 \\ &= 95 \end{aligned}$$

請問 95 是計算那一個算式的答案？

- ①  $55 + 40$
- ②  $5 \times (3 + 8) + 40$
- ③ 每一個算式

$$\begin{aligned} &5 \times (3 + 8) + 40 \\ &= 5 \times 11 + 40 \\ &= 55 + 40 \\ &= 95 \end{aligned}$$

以前學過的算式只有一個等號，為什麼可以用連等號來記錄？

上述記法是詳細的記法嗎？



因為： $5 \times (3 + 8) + 40 = 5 \times 11 + 40$

$$5 \times 11 + 40 = 55 + 40$$

$$55 + 40 = 95$$

所以： $5 \times (3 + 8) + 40 = 95$

這是比較詳細的記法，

主要的數學概念是等號的遞移性。

可以簡化上述記法嗎？

將前面的記法摘要記成：

$$5 \times (3 + 8) + 40$$

$$= 5 \times 11 + 40$$

$$= 55 + 40$$

$$= 95$$

逐次減項是摘要的記法。

省略  $5 \times (3 + 8) + 40 = 95$

教師應檢查答案 95 的意義。

您看到  $a=b=c=d$  會想到什麼？

有進行教學的活動嗎？

① 因為： $a=b$ ， $b=c$ ， $c=d$

所以： $a=d$

摘要記成： $a=b=c=d$

②  $a=b$ ， $a=c$ ， $a=d$

摘要記成： $a=b=c=d$

$a$ 、 $b$ 、 $c$  是任意正整數，哪些算式恆成立？

①  $a \div b \times c = a \div (b \times c)$ 。

②  $a \div b \div c = a \div (b \div c)$ 。

③  $a \times b \div c = a \times (b \div c)$ 。

④  $a \times b \div c = a \div b \times c$ 。

解題策略：①代數字

②代公式(有哪些公式)

③倒數概念

①  $a \div b \times c = a \div (b \times c) \Rightarrow a \times \frac{1}{b} \times c = a \times \left( \frac{1}{b \times c} \right)$

②  $a \div b \div c = a \div (b \div c) \Rightarrow a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} = a \times \frac{b}{c}$

③  $a \times b \div c = a \times (b \div c) \Rightarrow a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{b}{c}$

④  $a \times b \div c = a \div b \times c \Rightarrow a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{b} \times c$

數學上的運算性質：

加法交換律；加法結合律

乘法交換律；乘法結合律

乘法對加法的分配律

數學上只討論加、乘二元運算

⇒ 國小(中)討論加、減、乘、除運算

加法與減法運算

$$\textcircled{1} a + b - c = a - c + b$$

$$\textcircled{2} a - b - c = a - (b + c)$$

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$

## 乘法與除法運算(5-a-02)

①  $axb \div c = a \div cxb$

②  $a \div b \div c = a \div (bxc)$

## 乘法與減法運算：

① 乘法對減法的右分配律

$$(a-b)xc = axc - bxc \circ$$

② 乘法對減法的左分配律

$$ax(b-c) = axb - axc \circ$$

除法與加（減）法運算：

① 滿足右分配律：

$$(a+b)\div c = a\div c + b\div c \circ$$

$$(a-b)\div c = a\div c - b\div c \circ$$

② 不滿足左分配律：

$$a\div(b+c) \neq a\div b + a\div c \circ$$

$$a\div(b-c) \neq a\div b - a\div c \circ$$

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

如何教學： $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

$$(3+4) \times 8 = 3 \times 8 + 4 \times 8$$

$$(3+4) \times 8 = 7 \times 8$$

學生必須在數字情境中預期

$(3+4)\times 8=3\times 8+4\times 8$  一定會成立，

才能由數字情境延伸至未知數的情境。

$$(a+b)\times c= a\times c+ b\times c$$

1 盒水果禮盒有 30 顆紅蘋果和 6 顆青蘋果  
買 4 盒共有多少顆蘋果？

$$\text{解法 1：} 30\times 4+6\times 4=144$$

$$\text{解法 2：} (30+6)\times 4=144$$

層次一：算出來的答案相同，所以

$$30\times 4+6\times 4=(30+6)\times 4$$

層次二：它們是同問題的兩種算法，

不必算出結果就知道答案相同

$$\text{所以 } 30\times 4+6\times 4=(30+6)\times 4$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

國小(中)階段如何教學？

① 透過情境問題(關係)：

同一個情境有不同的解法

② 透過相反數概念(運算)：

$$a - (b + c) = a + (-b - c)$$

甲有 80 元，給乙 10 元，給丙 20 元，  
還剩下多少元？

$$80 - 10 - 20 = 50$$

$$80 - (10 + 20) = 50$$

$$80 - (10 + 20) = 80 - 10 - 20$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$



引入流程：

層次一：答案相同

層次二：它們是同一個問題的兩種算法，

不必算出結果就知道答案一定相同

機率 VS 機會

何謂機率？

何謂機會？

機率與機會有那些異同？

你會利用高中學習機率的經驗，

幫助國中學生學習機率嗎？

連續投擲一個銅板 7 次，都出現正面，  
再投擲一次，出現正面的機率是多少？

某夫妻連續生了 7 個女兒，又懷孕了，  
請問第 8 胎生女兒的機率是多少？

圖釘只有尖針朝上及尖針朝下兩種可能，  
投擲圖釘時尖針朝上的機率是多少？

我累積了許多經驗，當相同事件發生前  
可以透過先前經驗，預測該事件發生的  
可能性有多大，這就是機會的概念。

經驗愈多，預測正確機會愈大。

我有足夠的知識，當該事件發生前，  
能夠透過知識判斷該事件發生機會有多大。

知識愈豐富，預測正確機會愈大。

以投擲一枚骰子為例：

生活情境的經驗 ⇨ 數學模型化

① 經過多次投擲，發現出現的點數有 6 種

可能且每個點數出現的機會大約相同。

② 建立數學模型：

假設每個點數出現的機率都是  $\frac{1}{6}$ 。

③ 擴充數學模型：

投擲 1 枚骰子出現點數和是奇數的機率

投擲 2 枚骰子出現點數和是奇數的機率

## 未知數的發展層次：

層次一：某數(確定且唯一)

層次二：某數(確定但多個)

層次三：變數

層次一：某數(確定且唯一)

$$x + 5 = 8$$

$$y \times 5 = 40$$

$$5x - 1 = 2x + 17$$

一元一次方程式都屬於層次一

層次二：某數(確定但多個)

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$2x + 4y = 24 \quad \text{全數} \Rightarrow \text{整數} \Rightarrow \text{有理數} \Rightarrow \text{實數}$$

$$2x + 5 > 10$$

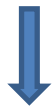
$$3x + 5 \quad \Rightarrow \quad x \text{ 是什麼?}$$

國小引入一元一次方程式的流程

$$5 + ( ) = 8 \quad \Rightarrow \quad 5 + x = 8$$

國中引入一元一次方程式的流程

$$3x \quad \Rightarrow \quad 3x + 5 \quad \Rightarrow \quad 3x + 5 = 20$$



層次二  $\Rightarrow$  層次一

◎層次一概念發展的流程：

- 一：位置的概念。
- 二：傳統的未知數概念。
- 三：可以運算的數(未知數定理)。

一：位置的概念

$$5 + ( ) = 8$$

未知數的角色只是一個位置，該位置填入某些數字後，可以讓算式成立，但是，目前不知道可以填入的數字是什麼。

當學生有足夠解題的經驗，知道那個位置裡面一定可以填入一個確定的數字，此時，就可以使用 x 或甲等符號來替代( )。

## 二：傳統的未知數概念

$$5+x=8$$

$$5+甲=8$$

x 或甲代表(或替代)某一個確定的數字，  
只是該數字目前未知。

## 三：一個可以運算的數

$$2x+3=5x+12$$

x 雖然是一個目前不知道等於多少的未知數，  
但是，只要它是一個數，它就能與其它的數一  
起做運算，而且順從運算所有的性質。

如果未知數只是位置的概念或傳統的未知數概念，學生的想法只能算是算術，如果未知數的角色是代表一個可以運算的數，所進行的活動才是代數。

算術中的未知數，可能只是一個位置，也可能代表傳統的未知數角色，它們都等待數值的發現。

代數中的未知數，代表一個符號，它擁有其本身數學物件的本值，可以和其它的數進行運算。

$$3x + 6 = 15$$

$$3x = 15 - 6$$

$$x = 9 \div 3 \quad \Rightarrow \quad x \text{ 等待被發現}$$

$$5x + 3 = 2x + 12$$

$$5x = 2x + 9$$

$$5x - 2x = 9 \quad \Rightarrow \quad x \text{ 被運算}$$



108 課綱：

七年級：一元一次方程式  
二元一次方程式  
一元一次不等式

八年級：一元二次方程式

一次函數

等差、等比數列

凸多邊形的內角和

### 層次三：變數

$$\textcircled{1} 7x + 3 = 5x + 9$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\textcircled{2} y = f(x) = 5x + 9$$

$$f(6) = 30 + 9$$

$$= 39$$

◎這兩組數學式子意義是否相同？

數學式子中「**x**」意義是否相同？

$$\textcircled{1} 7x + 3 = 5x + 9$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

算式：方程式

x：未知數

unknow

$$\textcircled{2} f(x) = 5x + 9$$

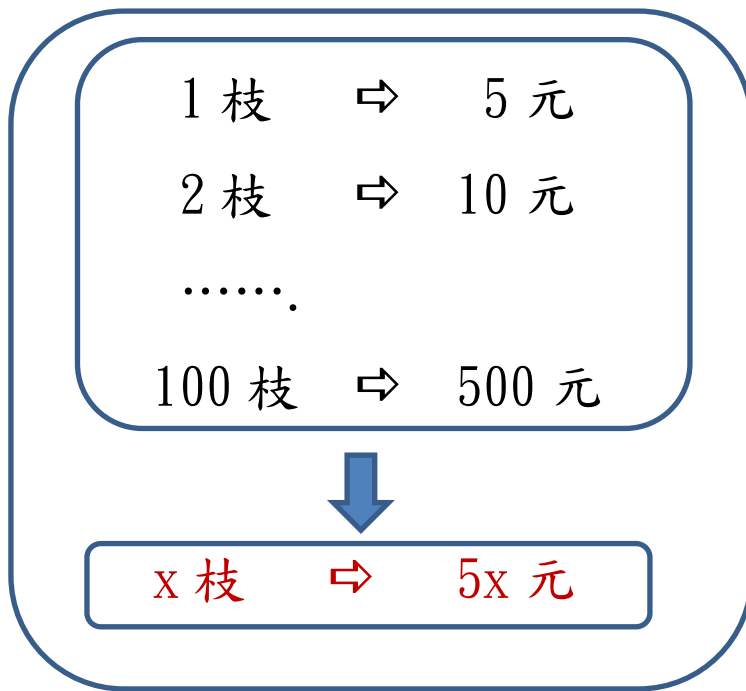
$$f(6) = 30 + 9$$

$$= 39$$

算式：函數

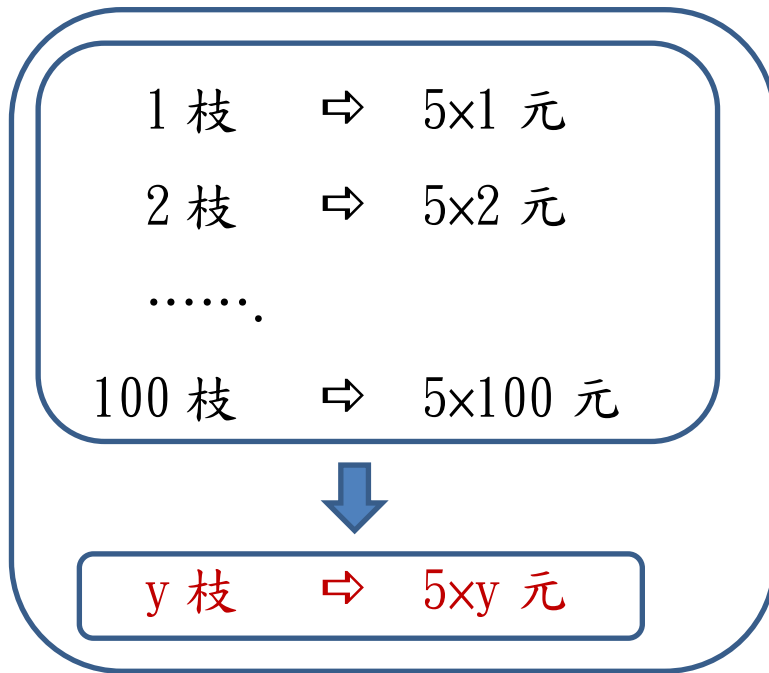
x：變數

variable



◎上述的表示法能引入變數  $x$  的概念嗎？

變數  $x$  是什麼？



◎上述的表示法能引入變數  $x$  的概念嗎？

變數  $x$  是什麼？

1 枝  $\Rightarrow$  5×1 元

2 枝  $\Rightarrow$  5×2 元

3 枝  $\Rightarrow$  5×3 元

.....

100 枝  $\Rightarrow$  5×100 元

請用一個數學式子把上面表格記下來，  
讓別人看到數學式子就想到表格

y 枝  $\Rightarrow$  5xy 元

看到這個數學式子，  
你會想到前面的表格嗎？

$y$  枝  $\Leftrightarrow 5xy$  元 (對應關係)

$y=1, 2, 3, \dots, 100$  (定義域)

看到這個數學式子，  
你會想到前面的表格嗎？

①  $x \Leftrightarrow 5x$

②  $f(x)=5x \Leftrightarrow$  國中常見的函數

③  $y=5x \Leftrightarrow$  國中常見的函數

$x=1, 2, 3, \dots, 100$

這三種表示法，何者最具體？

為何要引入抽象的表示法？

五角柱有幾個頂點，幾個面，幾條邊？

六角柱有幾個頂點，幾個面，幾條邊？

五角柱

頂點的個數：10 VS

$5 \times 2$

邊的個數：15 VS

$5 \times 3$

面的個數：7 VS

$5 + 2$

有變數的概念

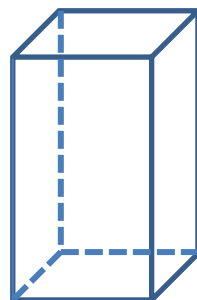
沒有變數的概念

### n 角柱

頂點： $n \Rightarrow n \times 2$

面： $n \Rightarrow n + 2$

邊： $n \Rightarrow n \times 3$



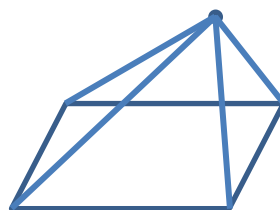
◎頂點 + 面 = 邊 + 2 (尤拉公式)

### n 角錐

頂點： $n \Rightarrow n + 1$

面： $n \Rightarrow n + 1$

邊： $n \Rightarrow n \times 2$



◎頂點 + 面 = 邊 + 2 (尤拉公式)



### n 邊形內角和

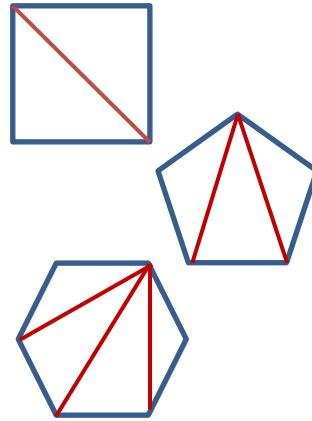
4 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 2$

5 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 3$

6 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 4$

.....

n 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times (n-2) \Rightarrow n$  是層次幾？



4 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 2 \Rightarrow 180^\circ \times (4-2)$

5 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 3 \Rightarrow 180^\circ \times (5-2)$

6 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times 4 \Rightarrow 180^\circ \times (6-2)$

.....

n 邊形  $\Rightarrow 180^\circ \times (n-2) \Rightarrow n$  是層次幾？

## n 邊形內角和

$$4 \text{ 邊形} \Rightarrow 180^\circ \times (4 - 2)$$

$$5 \text{ 邊形} \Rightarrow 180^\circ \times (5 - 2)$$

$$6 \text{ 邊形} \Rightarrow 180^\circ \times (6 - 2)$$

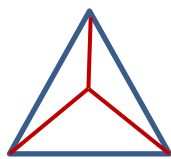
.....

$$n \text{ 邊形} \Rightarrow 180^\circ \times (n - 2)$$

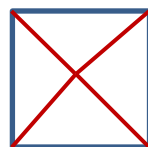
$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

## n 邊形內角和

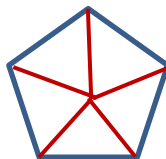
3 角形  $\Rightarrow 180 \times 3 - 360$



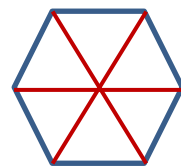
4 邊形  $\Rightarrow 180 \times 4 - 360$



5 邊形  $\Rightarrow 180 \times 5 - 360$



6 邊形  $\Rightarrow 180 \times 6 - 360$



n 邊形  $\Rightarrow 180 \times n - 360$

$\Rightarrow$  n 是層次幾？

4, 7, 10, 13, 16, .....

數列是不是函數？

4, 7, 10, 13, 16, .....

1  $\Rightarrow$  7

2  $\Rightarrow$  10

3  $\Rightarrow$  13

4  $\Rightarrow$  16

哪種表示方法

比較容易發現

變數的關係？

國小找規則的題目多數都是等差數列

① 「4, 7, 10, 13, 16, ……」 的第 n 項

② 「4, 7, 10, 13, 16, ……」 的一般項

它們的語意相同嗎？

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4+3 \times 0 \rightarrow 4+3 \times (1-1)$$

$$2 \rightarrow 7 \rightarrow 4+3 \rightarrow 4+3 \times 1 \rightarrow 4+3 \times (2-1)$$

$$3 \rightarrow 10 \rightarrow 4+6 \rightarrow 4+3 \times 2 \rightarrow 4+3 \times (3-1)$$

$$4 \rightarrow 13 \rightarrow 4+9 \rightarrow 4+3 \times 3 \rightarrow 4+3 \times (4-1)$$

$$5 \rightarrow 16 \rightarrow 4+12 \rightarrow 4+3 \times 4 \rightarrow 4+3 \times (5-1)$$

.....

$$n \rightarrow 4+3 \times (n-1) \Rightarrow n \text{ 是層次幾?}$$

$$n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

「4, 7, 10, 13, 16, ……」

$$\Rightarrow a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

您如何解讀上面的公式(等差數列)?

$$a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

將  $a_n$  視為末項或第  $n$  項  $\Rightarrow$  層次二

$$a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

將  $a_n$  視為一般項  $\Rightarrow$  層次三

第一個圖形是由 4 根竹籤排成，

第二個圖形是由 7 根竹籤排成，

依照這樣的規則往下排，請問

第 36 個( $k$  個)圖形是由幾根竹籤排成？



圖一



圖二



圖三

本題的評量重點為何？

- ① 找規則
- ② 求第  $K$  個圖形(層次二)
- ③ 求圖形的一般項(層次三)



圖 1



圖 2



圖 3

圖 39

4、7、10、13、16、...、 $1+3n$

4、7、10、13、16、...、 $4+3(n-1)$

您會導出哪個算式？

1  $\Rightarrow$  4  $\Rightarrow$  4  $\Rightarrow$  4  $\Rightarrow$   $4+3(1-1)$

2  $\Rightarrow$  7  $\Rightarrow$   $4+3$   $\Rightarrow$   $4+3\times 1$   $\Rightarrow$   $4+3(2-1)$

3  $\Rightarrow$  10  $\Rightarrow$   $4+3+3$   $\Rightarrow$   $4+3\times 2$   $\Rightarrow$   $4+3(3-1)$

4  $\Rightarrow$  13  $\Rightarrow$   $4+3+3+3$   $\Rightarrow$   $4+3\times 3$   $\Rightarrow$   $4+3(4-1)$

5  $\Rightarrow$  16  $\Rightarrow$   $4+3+3+3+3$   $\Rightarrow$   $4+3\times 4$   $\Rightarrow$   $4+3(5-1)$

$n \Rightarrow 4+3\times(n-1) \Rightarrow n$  是層次幾？



$$\begin{array}{l} 1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1+3 \times 1 \\ 2 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1+3 \times 2 \\ 3 \Rightarrow 10 \Rightarrow 1+3 \times 3 \\ 4 \Rightarrow 13 \Rightarrow 1+3 \times 4 \\ 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 1+3 \times 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 4+3(1-1) \\ 2 \Rightarrow 7 \Rightarrow 4+3(2-1) \\ 3 \Rightarrow 10 \Rightarrow 4+3(3-1) \\ 4 \Rightarrow 13 \Rightarrow 4+3(4-1) \\ 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 4+3(5-1) \end{array}$$

您喜歡哪種引入方式？為什麼？

如何幫助學生理解「便宜5元」？

溝通問題：看不懂題目的描述

數學問題：看懂題目，但是不會算

性質 VS 關係

質數是性質，互質是關係，何者較困難？

鈍角是性質，內錯角是關係，何者較困難？

「便宜5元」是性質或關係

「便宜5元」是兩數的關係，

必須有兩個物件才會發生關係。

訂價20元、售價15元，

⇒ 15元比20元便宜5元

## 特例 VS 集合

某張椅子(特例) VS 所有椅子(集合)

您的媽媽(特例) VS 每個人的媽媽(集合)

正方形的某邊(特例) VS 正方形的邊(集合)

某個梯形(特例) VS 梯形(集合)

「便宜5元」是特例或集合？

「便宜5元」是集合，

至少要有2~3個特例才會形成集合。

訂價20元、售價15元

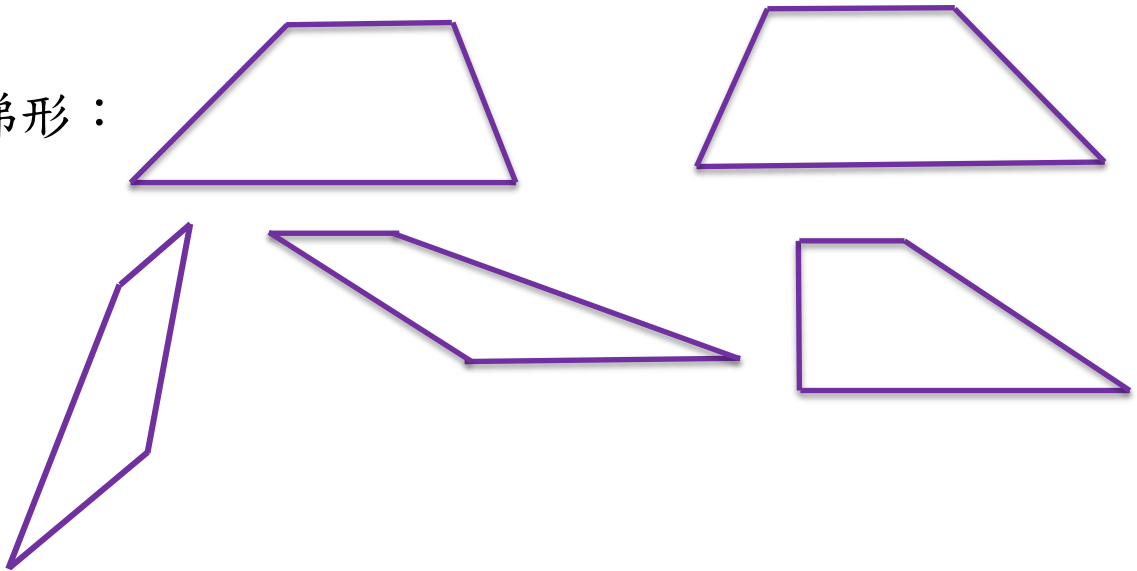
訂價75元、售價80元

訂價1000元、售價995元

⇒ 都稱為「便宜5元」

集合(部份) ⇨ 字集合(全部)

梯形：



遞移性

① 甲和乙，誰比較重？

② 甲和乙，誰比誰重？

你喜歡哪種問法？

① 甲比乙重，乙比丙重，甲和丙誰比較重？

② 甲比乙重，乙比丙重，甲和丙誰比誰重？

你喜歡哪種問法？

甲比乙重，乙比丙重  $\Rightarrow$  甲比丙重

關係的問法，一定要出現兩個物件。

甲、乙、丙三條繩子，誰最長？

如何教學？

甲比乙長、甲比丙長  $\Rightarrow$  甲最長

97 及 108 課綱：

認識 ⇨ 理解 ⇨ 熟練

經驗 ⇨ 察覺 ⇨ 理解



看到現象

預期成立

知道理由


甲比乙長，乙比丙長 ⇨ 甲和丙誰比誰長？

甲 

乙 

乙 

丙 

甲 

乙 

丙 

您喜歡哪種布題方式？

甲比乙長，乙比丙長  $\Rightarrow$  甲和丙誰比誰長？

不給圖，學生也能成功解題嗎？

看到現象  $\Rightarrow$  預期成立(?)

學生要有足夠看到現象的解題經驗，  
才能夠預期現象一定會成立。

甲比乙重，乙比丙重  $\Rightarrow$  甲比丙誰比誰重

甲比乙重，乙比丙重  $\Rightarrow$  甲比丙重



看到現象(?)  $\Rightarrow$  預期成立

直接宣告等同於很快忘記。

學生要有足夠看到現象的解題經驗，  
才能夠預期現象一定會成立。

引入算式  $5+3>7$

①  $5+3$  和  $7$ ，誰比較大？

②  $5+3$  和  $7$ ，誰比誰大？

哪一種問法比較恰當？

$5+3$  和  $7$ ，誰比較大？

$5+3$  比較大  $\Rightarrow$  無法引入不等式

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5+3$	$7$

$5+3$  和  $7$ ，誰比誰大？

$5+3$  比  $7$  大  $\Rightarrow$  記成  $5+3>7$

$5+3$	<input type="checkbox"/>	$7$
-------	--------------------------	-----



- ①  $5+3$  和  $8$ ，誰比誰大？  $\Rightarrow 5+3=8$
- ②  $8$  和  $5+3$ ，誰比誰大？  $\Rightarrow 8=5+3$
- ③  $5+3$  和  $6+2$ ，誰比誰大？  $\Rightarrow 5+3=6+2$

①  $14 \div 3 = 4 \dots 2$

②  $14 = 3 \times 4 + 2$

你喜歡那一種記法？為什麼？

①  $14 \div 3 = 4 \dots 2$   $\Rightarrow$  等號是得到答案

②  $14 = 3 \times 4 + 2$   $\Rightarrow$  等號是兩邊一樣大

韓信點兵：

3 個一數、5 個一數、7 個一數都剛好數完

$$\text{甲} \div 3 = q_1 \cdots 1$$

$$\text{甲} \div 5 = q_2 \cdots 1 \quad \Rightarrow \quad \text{甲} : \boxed{3、5、7 \text{ 的公倍數} + 1}$$

$$\text{甲} \div 7 = q_3 \cdots 1$$

$$\text{甲} = 3 \times q_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{甲} - 1 = 3 \times q_1$$

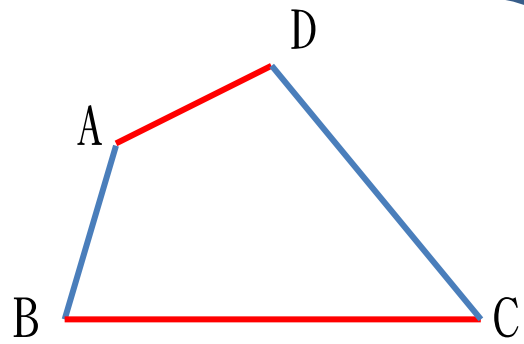
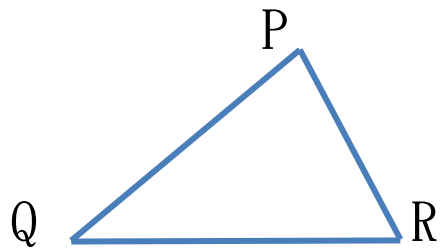
$$\text{甲} = 5 \times q_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{甲} - 1 = 5 \times q_2$$

$$\text{甲} = 7 \times q_3 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{甲} - 1 = 7 \times q_3$$



甲 - 1 : 3、5、7 的公倍數

對邊是性質或是關係？



①角 P 的對邊是 OR    ②AD 的對邊是 BC

③AD 和 BC 為一雙對邊

①角 P 的對邊是 OR     $\Rightarrow$  對邊是性質

②AD 的對邊是 BC     $\Rightarrow$  對邊是性質

③AD 和 BC 為一雙對邊     $\Rightarrow$  對邊是關係

◎一張紙的邊長 AB 是 100 公分，如果將其影印縮小為 80%後，再放大為 120%，則 AB 較原來的長度增(減)多少公分？

◎縮小 80%，指的是面積縮小或是長度縮小？

本題的答案為何？

◎一張紙的邊長 AB 是 100 公分，如果將其影印縮小為 80%後，再放大為 120%，則 AB 較原來的長度增(減)多少公分？

為何多數人都回答命題者想要的錯誤答案？

※ $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後  $\angle C=?$

本題的評量重點為何？

◎ $\triangle ABC$ ， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，  
將該三角形放大 2 倍後  $\angle C=?$

甲比乙多 5，乙比丙多 10，甲比丙多多少？

本題是特例或集合？

丙(甲、乙)是任意數，答案都相同！

$$\text{丙} = 18 \Rightarrow \text{乙} = 28 \Rightarrow \text{甲} = 33$$

$$\text{甲} - \text{丙} = 33 - 18 = 15$$

$$\text{丙} = 50 \Rightarrow \text{乙} = 60 \Rightarrow \text{甲} = 65$$

$$\text{甲} - \text{丙} = 65 - 50 = 15$$

甲(乙、丙)是任意數，答案都相同！

$$\text{丙} = 18 \Rightarrow \text{乙} = 18 + 10 \Rightarrow \text{甲} = 18 + 10 + 5$$

$$\text{甲} - \text{丙} = (18 + 10 + 5) - 18 = 15$$

$$\text{丙} = 50 \Rightarrow \text{乙} = 50 + 10 \Rightarrow \text{甲} = 50 + 10 + 5$$

$$\text{甲} - \text{丙} = (50 + 10 + 5) - 50 = 15$$

甲(乙、丙)是任意數，答案都相同！

$$\text{丙} = 18 \Rightarrow \text{乙} = 18 + 10 \Rightarrow \text{甲} = 18 + 10 + 5$$

$$\text{甲} - \text{丙} = (18 + 10 + 5) - 18 = 10 + 5$$

$$\text{丙} = 50 \Rightarrow \text{乙} = 50 + 10 \Rightarrow \text{甲} = 50 + 10 + 5$$

$$\text{甲} - \text{丙} = (50 + 10 + 5) - 50 = 10 + 5$$

◎引入公式的概念

一件工程，甲獨做 12 天完工，乙獨做 18 天完工  
兩人合作，多少天完工？

本題是特例或集合？

馬路工程長 36 公尺

$$36 \div 12 = 3$$

$$36 \div 18 = 2$$

$$3 + 2 = 5$$

$$36 \div 5 = 7.2$$

馬路工程為 1

$$1 \div 12 = \frac{1}{12}$$

$$1 \div 18 = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$$

$$1 \div \frac{5}{36} = \frac{36}{5} = 7.2$$



◎甲的速率：5 公尺/秒

乙的速率：3 公尺/秒

兩人同時同地同向出發，10 秒後距離幾公尺？

方法一： $5 \times 10 = 50$ ， $3 \times 10 = 30$ ， $50 - 30 = 20$

方法二： $5 - 3 = 2$ ， $2 \times 10 = 20$

為什麼方法二比方法一困難很多？

方法一：特例，呈現 10 秒後的結果

方法二：集合，每一秒都追 2 公尺

(7)哥哥的一步長 60 公分，弟弟的一步長 50 公分，兩人同時同地往反方向走 25 步，會相距多少公分？下列哪一個算式，可以表示兩人相距多少公分？

①  $60+50-25$       ②  $60\times 25-50\times 25$

③  $(60+50)\times 25$       ④  $(60-50)\times 25$

◎評量重點：

①兩或三步驟問題的列式(答案是兩步驟)

②追趕問題(六年級)的先備知識

選 答 率 選 項	答題反應比率 (*表正確答案)		
	整體	低分組	高分組
1	.05	.13	.00
2	.22	.35	.07
3*	.48	.25	.77
4	.25	.27	.15
通過率	.48	鑑別度	.52

## 最簡單整數比

紅茶          牛奶

200 公升 : 120 公升

100 公升 : 60 公升

50 公升 : 30 公升

10 公升 : 6 公升

5 公升 : 3 公升

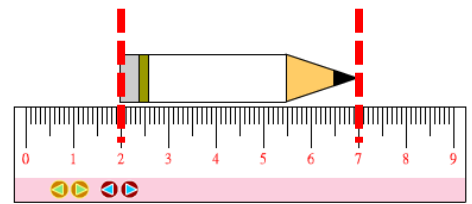
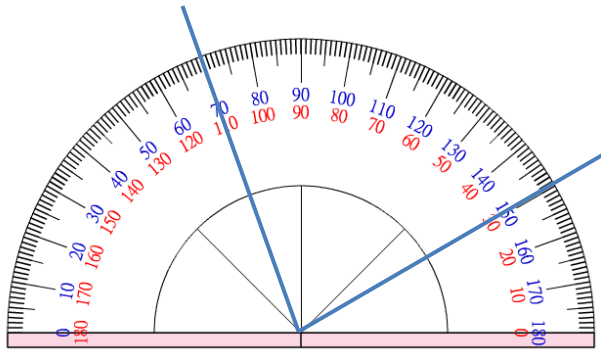
0.5 公升 : 0.3 公升

⇒ 5 : 3 (5 份 : 3 份)

最簡單整數比不是 5 公升 : 3 公升

最簡單整數比是 5 份 : 3 份 (配方)

這兩題的解題方式是否相同？



點數策略：

1、2、3、4、5 ➡ 5 個 1 公分合起來是 5 公分

10、23、...、80 ➡ 80 個 1 度合起來是 80 度

前者是 1 個一數，後者是 10 個一數

減法策略：

$$7 - 2 = 5$$

$$110 - 30 = 80$$

前者是整數數線概念，後者是旋轉角概念

### 複名數的加、減

公尺	公分	公尺	公分
3	5	3	05
+ 2	48	+ 2	48
<hr/>		<hr/>	

哪一種記法是正確的？

公 公	公 公	小 分	億 萬
尺 分	斤 克	時 鐘	
2 78	5 468	3 48	53 7685
+ 3 56	+ 3 875	+ 2 95	+ 9 6402
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>

這四題都和兩位數的加減，符合同構的關係。

① 兔子 1 分鐘跑 8 公尺，獵犬 1 分鐘跑 10 公尺，  
兔子先跑 5 分鐘，問獵犬幾分鐘後能追上？

② 4 點到 5 點之間，時針和分針何時會重疊？

這兩題是否滿足同構關係？

獵犬追兔子

(直線追趕)

分針追時針

(旋轉追趕)

兔子 VS 獵犬

兔子 1 分鐘跑 8 公尺

獵犬 1 分鐘跑 10 公尺

時針 VS 分針

時針 1 分鐘轉 0.5 度

分針 1 分鐘轉 6 度

兔子先跑 5 分鐘

$$8 \times 5 = 40$$

$$10 - 8 = 2$$

$$40 \div 2 = 20$$

20 分追上

4 點：時針在分針前面

$$30 \times 4 = 120 (\text{度})$$

$$6 - 0.5 = 5.5 (\text{度})$$

$$120 \div 5.5 = 21 \frac{9}{11}$$

4 點  $21 \frac{9}{11}$  分兩針重合

圓形步道的直徑是 200 公尺

甲 20 分鐘繞一圈，乙 30 分鐘繞一圈，

- ① 乙先走 8 分鐘甲再追之，多久可以追上？
- ② 甲、乙二人反向而行，多久後相遇？

$$360 \div 20 = 18 \quad \text{甲每分鐘走 18 度}$$

$$360 \div 30 = 12 \quad \text{乙每分鐘走 12 度}$$

$$\textcircled{1} (12 \times 8) \div (18 - 12) = 16$$

答：16 分鐘追上

$$\textcircled{2} 360 \div (18 + 12) = 12$$

答：12 分鐘第一次相遇



小明有一些錢，他買了 3 枝 5 元的鉛筆後，  
身上還剩 40 元，請問小明原有多少元？

算式填充題記錄問題

$$5 \times 3 + 40 = ( \quad )$$

方程式記錄問題

$$x - 5 \times 3 = 40$$

哪一種列式的方法比較簡單？

國小選擇哪一種列式的方法？為什麼？

$x - 5 \times 3 = 40 \Rightarrow$  翻譯問題

$5 \times 3 + 40 = ( \quad ) \Rightarrow$  解題計畫

代數是正向思維，算術是逆向思維，  
長大後會利用代數來解題。

國小階段：

年齡問題、平均問題、追趕問題、雞兔問題等

這些問題是否為國小教學或評量的重點？

雞兔問題適合教學或評量的年級：

① 國小中年級 ⇨ 嘗試錯誤

② 國小高年級 ⇨ 有效率的嘗試錯誤

③ 國中一年級 ⇨ 一元一次方程式

④ 國中二年級 ⇨ 二元一次聯立方程式

## 嘗試錯誤法 VS 學童法 VS 算則

嘗試錯誤法：面對新問題時竭能的解題策略

學童法：學童自己發展出來，不是最有效率的  
解題策略

算則：某個時代，多數人解決問題時所使用最  
有效率的解題策略

哪些方法需要精熟？

哪些方法只要有解題的經驗即可？

某平年的元旦是星期日，  
該年有幾個月有 5 個星期日？

$$365 \div 7 = 52 \cdots \cdots 1$$

$$52 + 1 = 53$$

$$4 \times 12 = 48$$

$$53 - 48 = 5$$

答：有 5 個月有 5 個星期日