

中間鏤空立體圖的結構與體積

洪雪芬 高雄市國小數學輔導團/高雄市博愛國小

一、實施對象：六年級（一般班級 攜手課輔班級）

二、教學目標

主題	<input type="checkbox"/> 數與計算 <input type="checkbox"/> 量與實測 <input checked="" type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
相關分年細目（97）	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
教學目標	1.能正確繪製立體圖，並掌握「中間鏤空立體圖」的結構。 2.能掌握「中間鏤空立體圖」體積計算的解題策略。

三、學習難點

關於「中間鏤空立體圖的結構與體積」這一個主題，透過 PISA 樣本試題，針對六年級普通班 31 位學生施測結果，有 4 位學生雖然答案正確，但卻無法正確繪製 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖；更有 4 位學生由於無法正確繪製 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖，以致完全無法解題；可見立體圖之繪製，對於部分國小六年級學生而言是困難的。從學生的解題分析歸納學習困難主要分為三類：

「中間鏤空立體圖」的學習困難	
1	無法正確繪製立體圖。
2	無法掌握「中間鏤空立體圖」的結構。
3	無法掌握「先算全部體積，再挖掉空心部份體積」的解題策略。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

進行補救教學可採「簡化、減量、分解、替代及重整」等方式來調整教學內容。說明如下：「簡化」是指調整教學目標內涵的難度或認知程度。「減量」為減少教學目標內涵的內容份量。「分解」是將教學目標分解為幾個小目標進行教學。「替代」是將教學目標以另一種方式或表徵來達成。「重整」則是指以生活化或功能性的型態達成教學目標。

針對「中間鏤空立體圖的結構與體積」的學習困難，補救教學內容處理如下：

教學處理	內容說明
簡化	/
減量	/
分解	將欲達成之目標分解為幾個小目標，分開學習，例如： 第一階段：完成簡易題目 $3 \times 3 \times 3 - 1 \times 1 \times 1$ 、 $4 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2$ 的解題。 第二階段：完成原題目 $6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2$ 的解題。 第三階段：完成總結評量題目 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3$ ， $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3$ 的解題。
替代	1.以數位素材替代紙本上的圖示，引導其理解題意、掌握題意。 2.以同儕畫的正確圖示替代學生自己畫的圖示，引導其掌握題意。
重整	/

五、教學規劃與實施

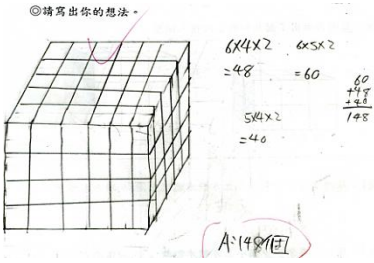
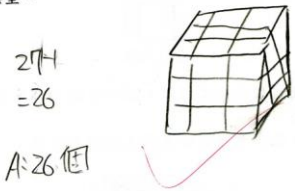
(一) 設計理念

補救教學著重及時和適性，因此，筆者的補救教學規劃與實施主要分為兩個階段，首先針對個別學生之解題迷思進行分析，其次，採用「分解」、「替代」方式調整補救教學內容，最後以個別訪談方式適度提供各種線索及提示來進行補救教學。

(二) 教學活動

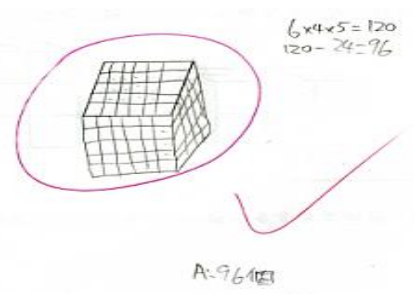
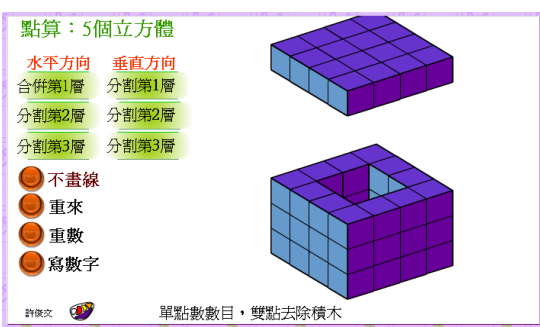
由於學生 A10、A14 和 A30 的迷思概念相當具有代表性，因此，以此三位學生的補救教學為例，說明如下：

1. 學生 A10 之補救教學：教師以個別訪談方式，適度提供各種線索及提示來進行補救教學：(1) 透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何。(2) 透過問話協助學生思考如何解題。(3) 協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

主要問題與活動	說明及評量重點
<p>● 透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何。 T: (指著學生的解答) 請說說看，你是怎麼算出來的？</p>  <p>S: 先算出每一個面的立方體數量，再加起來。 T: 你的答案是錯的，想想看，錯在哪裡？ S: (想了一會兒) 有重疊，沒有扣掉。 T: 那麼，要扣掉多少？ S: 4x4, 6x4, 5x4, (想了一會兒)，好複雜，算不出來。 T: 那麼，可以用別的方法算算看。</p> <p>● 透過問話協助學生思考如何解題。 T: (指著前一題的解答) 說說看，你是怎麼算出來的？</p> <p>問題3：蘇珊想到可以用比實際還要少的小立方體來作出圖C的積木模型。她想用膠水黏出一個看起來像圖C，但是內部是中空的積木模型。問蘇珊需要多少個小立方體來做出這個看起來像圖C，但是內部卻是中空的積木模型。</p>  <p>S: 先算出 $3 \times 3 \times 3 = 27$，再扣掉空心部分一個。</p>	<p>● 學生能理解自己的迷思概念為算出六面的立方體數量，但是沒有將重複部分扣掉。</p> <p>● 學生能以自己的能力提出解題策略。</p>

<p>T: 那麼，你知道問題 4，可以怎麼算了嗎？</p> <p>S: 可以先算全部，再挖掉空心的部份。</p> $6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 = 120 - 24 = 96$ <p>● 協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。</p> <p>T: 空心部分是怎麼算出來的？</p> <p>S: $6-2=4$，$5-2=3$，$4-2=2$，$4 \times 3 \times 2 = 24$，就是空心的部份。</p>	<p>● 學生能清楚說出自己的解題策略。</p>
--	--------------------------

2. 學生 A14 之補救教學：教師以個別訪談方式進行補救教學：(1) 透過問話掌握學生之迷思概念，並引出學生之認知衝突。(2) 透過數位素材的展示，協助學生理解題意，並解題。(3) 協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

主要問題與活動	說明及評量重點
<p>● 透過問話掌握學生迷思概念，並引出學生之認知衝突。</p> <p>T: (指著學生的解答) 你是怎麼算出來的？</p>  <p>S: 在圖上方塗 12 格和側面塗 12 格 $12 + 12 = 24$，挖掉 24 個。</p> <p>T: (指著圖形) 可是，你的圖多畫一層了。</p> <p>S: (先從底部擦掉一層，然後在圖上方塗 12 格和側面塗 8 格) 那要改成 $12 + 8 = 20$。</p> <p>T: 可是，這樣改，答案就錯了。</p> <p>S: ………</p> <p>● 透過數位素材的展示，協助學生理解題意。</p> <p>T: (教師秀出下圖引導學生理解題意) 請看這個圖要挖掉多少個小立方體？</p>  <p>S: 要挖掉 $4 + 4$。</p> <p>T: $4 + 4$ 指的是什麼？</p>	<p>● 教師需先知道學的問題在哪裡，才能找出適當的補救教學策略，教師透過問話掌握學生之迷思概念。</p> <p>● 學生能掌握題意、掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。</p>

S:指的是中間要挖掉的部分。

T: 回到原來的題目，你知道要挖掉多少個小立方體嗎?

S:知道，要挖掉 $12+12$ ，兩層。

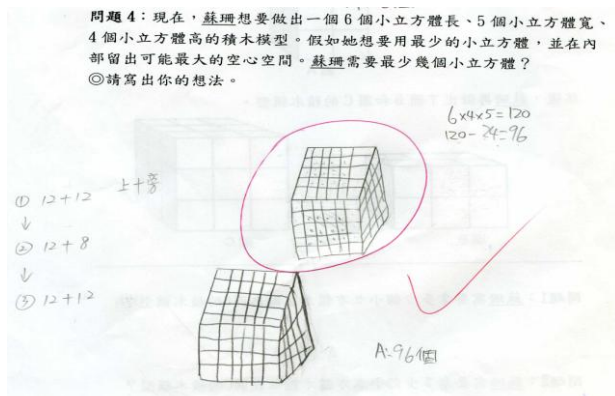
●協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

T:空心部分是怎麼算出來的?

S:一層是 $4 \times 3 \times 2 = 12$ ， $12+12=24$ 。

T:很好，現在你要怎麼修改一下你的答案。

S:改圖就好，答案還是 24，不用改。修改如下：



註:上圖左邊的小字是教師忍不住記下的學生解題歷程：從 $12+12$ (錯誤)到 $12+8$ (錯誤)到 $12+12$ (正確)。

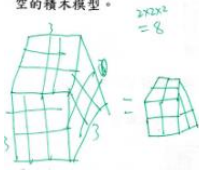
●學生能清楚說出自己的解題策略。

3.學生 A30 之補救教學：教師以個別訪談方式進行補救教學：(1) 透過數位素材和圖示，協助學生掌握「中間鏤空立體圖」的結構，並解題。(2) 協助學生繪製立體圖，發展空間概念及能力。

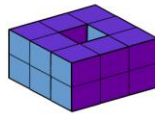
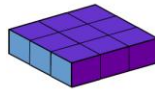
主要問題與活動	說明及評量重點
<p>●透過數位素材和圖示，協助學生掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。</p> <p>T: (教師秀出下圖引導學生理解題意) 請看這個圖要挖掉多少個小立方體?</p> <p>S:要挖掉 $4+4=8$。</p> <p>T:這個圖總共有幾個小立方體，請算算看。</p> <p>S:$4 \times 4 \times 4 = 64$，$4+4=8$，$64-8=56$。</p> <p>T: (教師秀出下圖引導學生理解題意) 回到問題 3，你</p>	<p>●學生能掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。</p>

知道要挖掉多少個小立方體嗎?

問題3: 蘇珊想到可以用比實際還要少的小立方體來作出圖C的積木模型。她想用膠水黏出一個看起來像圖C, 但是內部是中空的積木模型。問蘇珊需要多少個小立方體來做出這個看起來像圖C, 但是內部卻是中空的積木模型。

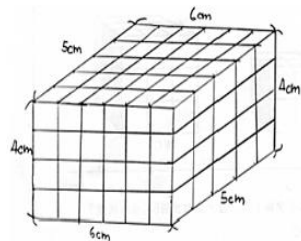


A: 8個積木



S: 要挖掉一個, $3 \times 3 \times 3 = 27$, $27 - 1 = 26$ 。

T: (秀出同學畫的很清晰的圖), 你知道題目的意思嗎?



S: 知道, 圖形的長寬高是 6、5、4, 中間是空心的。

T: 空心的部分有幾層?

S: 有兩層, $4 \times 3 \times 2 = 24$ 。修正如下:

$6 - 2 = 4$, $5 - 2 = 3$, $4 - 2 = 2$

$6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 = 120 - 24 = 96$ 。

● 協助學生繪製立體圖。

T: 你的圖畫得很好(中圖), 誰教妳的。

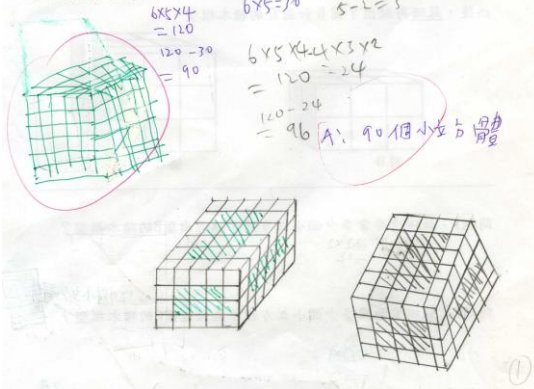
S: 我不會畫, 請同學幫我畫的。

T: 你也學著畫畫看吧。

S: 好的 (結果畫得很好) (右圖)

T: 你的學習態度真好, 進步真多!

問題4: 現在, 蘇珊想要做出一個6個小立方體長、5個小立方體寬、4個小立方體高的積木模型。假如她想要用最少的小立方體, 並在內部留出可能最大的空心空間。蘇珊需要最少幾個小立方體?
◎請寫出你的想法。



● 學生能繪製立體圖。

六、學生表現與教學省思

(一) 學生表現

學生 A10、A14、A30 針對總結評量內涵為 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3$ 及 $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3$ 之題目，均能正確解題，可見三位學生經過補救教學之後，已能完全掌握此題型之解題策略。學生表現如下：

編號	學生解題
A10	(1) $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) $7 - 2 = 5$, $6 - 2 = 4$, $5 - 2 = 3$, $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$
A14	(1) 先畫圖，看出一層要挖掉 3×3 ，總共要挖掉 3 層。 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) 先畫圖，看出一層要挖掉 5×4 ，總共要挖掉 3 層。 $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$
A30	(1) 先畫圖，再寫算式。 $5 - 2 = 3$, $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) 先畫圖，再寫算式。 $7 - 2 = 5$, $6 - 2 = 4$, $5 - 2 = 3$ $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$

(二) 教學省思

關於「中間鏤空立體圖」的學習，學生的學習困難有層次之差異，分別為無法掌握「先算全部，再挖掉空心部份」之解題策略、無法掌握「中間鏤空立體圖」的結構和無法正確繪製立體圖。教師針對學生的學習困難點，透過個別對話及補救教學之後，學生的迷思概念澄清了，能力也有所提升。

1. 學生能掌握「先算全部，再挖掉空心部份」之解題策略

A10 原來採用「先算出每一個面的立方體數量，再加起來。」之解題策略，此策略還需扣掉重複部分，對學生來說是困難的，於是引導學生先觀察自己在問題 3 所使用的的解題策略，也就是引導重新省思自己的解題思維，將舊經驗運用到新情境，進而嘗試進行問題 4 之解題。最後學生以「先算全部，再挖掉空心部份。」之解題策略，替代原來「先算出每一個面的立方體數量，再加起來。」解題策略，完成解題。從學生 A10 最後的評量表現，沒有畫圖，直接解題，可見其已能完全掌握此題型之解題策略。

2. 學生能掌握「中間鏤空立體圖」的結構

教師需先知道學生的問題在哪裡，才能找出適當的補救教學策略。首先，教師透過問話掌握學生 A14 之迷思概念；其次，透過數位素材展示較簡易的題目，內容為 $4 \times 4 \times 4$ 立體圖，挖掉 $2 \times 2 \times 2$ ，協助學生理解題意，掌握「中間鏤空之立體圖形」的結構；最後，引導學生清楚說出自己的解題策略。學生 A14 帶給我的最大省思是教師在批改學生作業時，宜注意其解題記錄，不要只看答案；若有疑問，可以透過問話進一步了解學生的解題思維，以便及早發現學生的迷思概念，予以導正。以學生 A14 為例，答案是對的，但是圖是錯的，還好有透過問話進一步了解學生的解題思維，否則就無法發現學生 A14 的迷思概念了。

3. 學生能正確繪製立體圖

學生 A30 因為無法正確繪製立體圖，以致無法正確解題；首先透過數位素材展示較簡易

的題目，內容為 $4 \times 4 \times 4$ 立體圖，挖掉 $2 \times 2 \times 2$ ，協助學生理解題意，以掌握「中間鏤空立體圖」的結構；其次，透過數位素材展示，協助學生修正問題 3 的錯誤解題；由於高雄市博愛國小許俊文老師設計的「切一切」數位素材最大只能畫出 $4 \times 4 \times 4$ 的立體圖，因此，在處理問題 4 時，秀出同學畫的 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖，協助學生 A30 解題。最令人欣喜的是，學生 A30 在同學的協助下，學會了繪製立體圖，當然也能順利解題了。

本文以「中間鏤空立體圖」為例，針對學習困難提出的補救教學策略包含：透過問話掌握學生之迷思概念，並引出學生之認知衝突；透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何；透過數位素材的展示，協助學生理解題意；透過同儕協助，引導學生學習繪製立體圖；透過對話引導學生清楚說出自己的解題策略等。總之，正因為學生的學習困難有層次之差異，所以教師在實施補救教學時，宜注重個別化教學，也就是要有針對性，要聚焦於學生的困難。如此，補救教學才能事半功倍。

七、學習資源參考資料

洪雪芬(2011)。運用PISA評量試題於國小六年級之數學解題初探。2011年南臺灣教育論壇。

樣本試題PISA。2011年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。

國民教育階段特殊教育課程綱要總綱。2011年10月1日，取自：

http://www.ntnu.edu.tw/spc/drlusp_1/home.html。

許俊文數位素材設計。http://www.paps.kh.edu.tw/aspx/math_menu/add_source_rec.aspx?rec=150