

數學 QUASAR 紙筆認知評量示例

高雄市博愛國小 洪雪芬

壹、前言

當代數學教學思潮中，國小數學教育目標除了引導學生掌握數、量、形的概念與關係之外，亦強調發展學生解題、說理與溝通的能力。近十年來，國內之國小數學教學在發表能力的培養和班級討論文化的提倡下，課堂中學生說數學、討論數學的精彩場景處處可見，然而近一兩年，課堂中熱烈發表與討論數學的景象已大幅減少，究其原因，除了實施九年一貫課程，數學領域教學時數減少之因素外，最大的原因應該是在推出解題溝通導向之數學教學之際，未能同時推出相對應之解題說理評量機制。

去年（92 年）九月，在梁淑坤教授的指導下認識了美國匹茲堡大學為提升經濟不利地區高中學生的數學思考及推理能力，所進行的一個 QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) 教學評量研究計畫。QUASAR 計畫使用種種評量來評估學生是否達到推理、解題、溝通之數學教學目標，包括易於大團體實施的學生紙筆認知評量；易於班級教學實施的教學導向作業，像是合作學習、個別操作的評量；以及針對重要態度、信念和性向的非認知評量。其中最具特色的是 QUASAR 紙筆認知評量工具的發展 (The QUASAR Cognitive Assessment Instrument, 簡稱 QCAI)，QCAI 的四個主要成份為數學內容、認知過程、表徵類型和任務背景。數學內容包含數、計算、測量、機率和統計、幾何、代數、估計、模式；認知過程包含理解數學題目、察覺數學關係、組織訊息、系統化闡述、評價答案的合理性、推論結果、證明答案和溝通數學想法。表徵類型包含文字、算式、圖形和圖表等。QCAI 注重評量學生在數學解題、推理和溝通方面的表現，與當代數學教育的精神，培養學生推理、問題解決和溝通之能力 (NCTM, 1989) 完全吻合。

筆者深信「在有計畫的引導下，學生可以學習到廣泛的數學內容，也可以深層的理解數學概念」，更深信如果評量的目標是學生「知道什麼以及會什麼」，那麼學生就不能只是寫出解答，還需要詳細說明想法和理由。因此，筆者參考美國 QUASAR 教學評量研究計畫的作法，嘗試規劃適合國小六年級學生之 QUASAR 紙筆認知評量方案，並實施之。本示例以「怎樣解題」為範疇，評量內容包括等差問題、乘法巧算、OOXX 規律、和差問題和倍數問題等五種題型，期望透過 QUASAR 紙筆認知評量之實施，瞭解學生數學解題說理的能力、數學正確解題與錯誤解題之解題類型和數學解題說理層次的分佈情形，更期望發展出一個能檢核學生解題、說理與溝通能力的紙筆評量機制。

貳、評量目標

- 一、瞭解每個學生在「怎樣解題」五種題型中，數學解題與說理的能力。
- 二、瞭解全班學生正「怎樣解題」五種題型中，正確解題與錯誤解題之解題類型。
- 三、瞭解全班學生正「怎樣解題」五種題型中，數學解題說理層次之分佈情形。

參、實施年級或適用對象

本示例之實施對象為高雄市博愛國小六年級 38 位學生，由於選定的題材「怎樣解題」是屬於小六、國一的銜接教材，因此適用對象為國小六年級及國中一年級學生。

肆、實施流程

QUASAR 紙筆認知評量的特色在於能夠讓學生將其解題的想法作充分的描述，對學生而言，可以透過說理作概念的澄清與解題的省思，對教師而言，可以深入了解學生解題創意與迷思，雖然仍為紙筆形式之評量，然而與一般的紙筆評量卻大異其趣。實施流程如下：

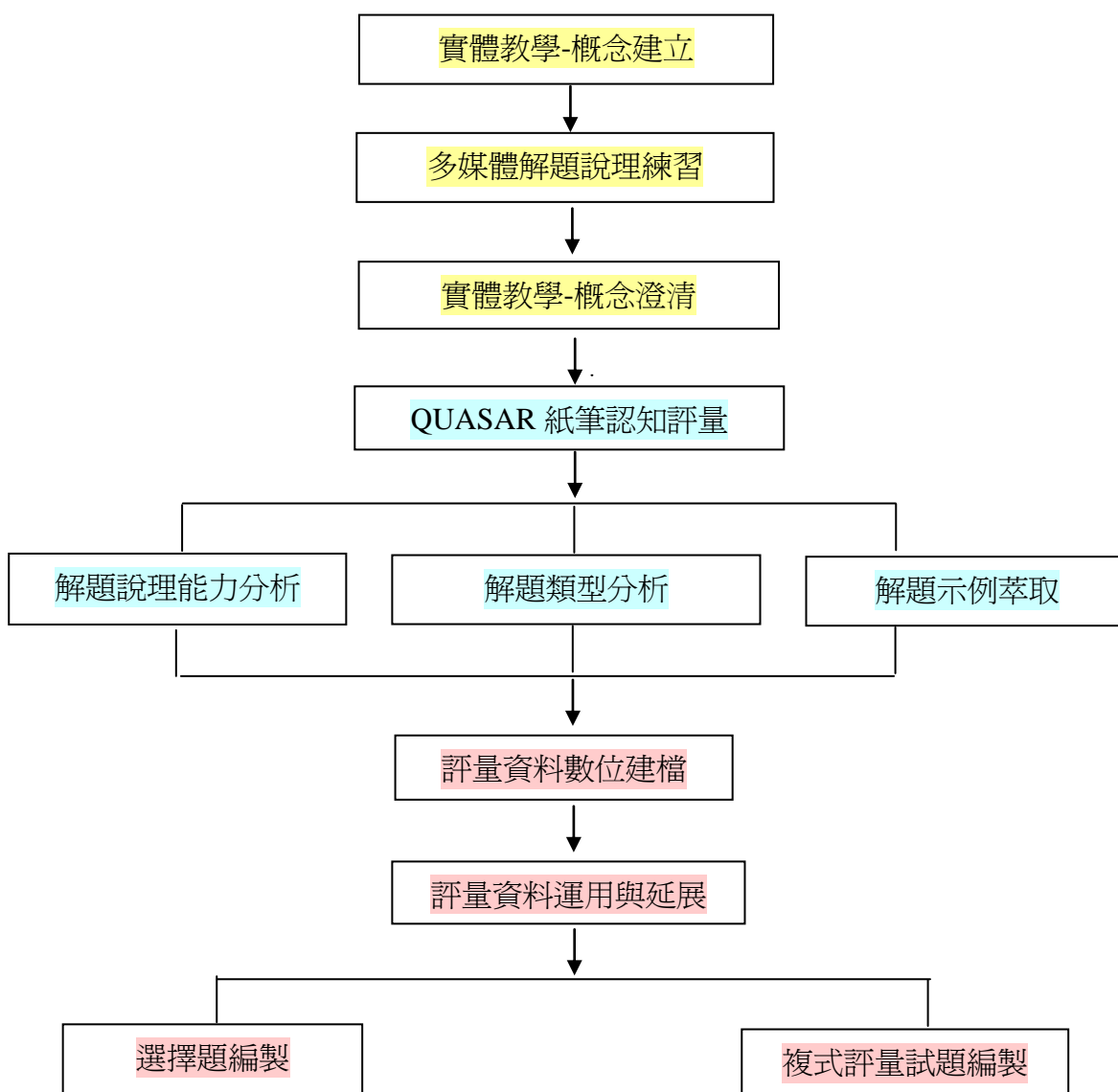


圖 4-1 QUASAR 紙筆認知評量實施流程

伍、評量內容

評量內容包括等差問題、乘法巧算、00XX 規律、和差問題和倍數問題等五種題型，每一個題型 2 題。QUASAR 認知評量題目和分析如表 5-1 和表 5-2。

表 5-1 QUASAR 認知評量題目

等差 1	$2+4+6+8+----+54+56+58+60=(\quad)$ 請寫出你的做法和想法！加油！
等差 2	$5+6+7+8+-----+87+88+89+90=(\quad)$ 請寫出你的做法和想法！加油！
乘法 1	$25 \times 125 \times 28 \times 32=(\quad)$ 算算看，並說出你的解題方法！GO！
乘法 2	$25 \times 16 \times 36 \times 125=(\quad)$ 算算看，並說出你的解題方法！GO！
OX 1	000XXXX000XXXX……，如此有規律的排下去，第 52 個是○還是 X？ 請寫出你的做法和想法！加油！
OX 2	0XX000XXXX00000XXXXXX……，如此有規律排下去，第 56 個和第 57 個各是 0 還是 X？請寫出你的做法和想法！加油！
和差 1	剛考完試，小丸子國語、數學兩科合起來是 192 分，國語比數學多 4 分，請問小丸子國語、數學各考幾分？請寫出你的做法和想法！加油！
和差 2	大雄把 800cc 的飲料裝成兩杯，大杯比小杯多 40cc，請問大杯，小杯飲料各是多少 cc？請寫出你的做法和想法！加油！
倍數 1	紅球、黃球共 240 個，紅球的數量是黃球的 5 倍，請問紅球、黃球各有幾個？請寫出你的做法和想法！加油！
倍數 2	紅豆 180 公斤，分成 A、B、C 三包，A 是 B 的 3 倍，B 比 C 多 20 公斤，請問 A、B、C 各是多少公斤？請寫出你的做法和想法！加油！

表 5-2 QUASAR 認知評量題目分析

數學內容	數、計算、估計	代數、模式	測量、機率和統計、幾何	
	乘法巧算、和差問題、倍數問題	00XX 規律、等差問題		
認知過程	理解數學題目、察覺數學關係、組織訊息、系統化闡述、評價答案的合理性、推論結果、證明答案和溝通數學想法。			
	乘法巧算、和差問題、倍數問題、等差問題、00XX 規律			
表徵形式	文字	算式	圖表	圖形
	和差問題、00XX 規律、倍數問題	等差問題、乘法巧算		

陸、評量標準

QUASAR 認知評量的特色在於評分規準的擬定，其評分規準分為 Level 1 到 5，原版之評分規準，如表 6-1，其中 Level 3 的評分規準為：答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明。由於筆者已將評量試卷樣貌作了修正，加了說理(想法)一欄，因此，學生留下空白沒有透過文字或圖形加以說明的可能性會降低，倒是將算式直接翻譯成文字或文字說理簡略不清楚的情況將大增，此外，也有可能產生答案正確，但計算過程錯誤或文字說理錯誤的情況，所以，筆者在評分規準上作了一些修正，如表 6-2。

表 6-1 QUASAR 評分規準原版

Level	評 分 規 準
Level 5	答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。
Level 4	答案正確，計算過程和文字說明或圖形說明正確，但不夠完整。
Level 3	答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明。
Level 2	答案不正確，但包含正確的數學推理；或只有一正確答案而無計算過程。
Level 1	嘗試回答

表 6-2 QUASAR 評分新規準

Level	評 分 規 準
Level 5	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
Level 4	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。
Level 3	答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯為文字或說理簡略不清楚。
Level 2	<ol style="list-style-type: none"> 1. 答案正確，計算過程正確，文字說理錯誤或無文字說理。 2. 答案正確，計算過程錯誤或無計算過程，文字說理簡略不清楚或說理錯誤或無文字說理。 3. 答案不正確，但包含正確的數學推理。
Level 1	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
備註	<ol style="list-style-type: none"> 1. 由於題型之不同，上述之【計算過程】可改為【解題過程】，【文字說理】可改為【圖形說明】。 2. 若是學生之表現，上述各項描述均不符合，可再以文字補充描述。

柒、學生之解題表現分析

評量題型共有五種，由於題型不同、教學評量之實施流程不同，因而學生之表現也有所不同，本文從學生之解題說理表現和解題類型兩個向度進行分析，並進行解題示例萃取。

一、學生之解題說理表現分析

本節除了針對學生解題說理 Level 1~5 之整體表現進行分析，更針對「解題正確者」之說理表現進行分析，茲逐題說明如下：

(一) 等差問題 **教學—多媒體解題 (09/19) —教學—紙筆評量 (09/30)**

等差問題採取第一類之教學評量流程：首先在實體教室中進行等差問題之教學，引導學生透過解題、討論和質疑辯證等活動澄清概念，其次引導學生到多媒體討論區作解題練習和同儕互動，然後根據學生之解題迷思進行再次教學，最後以紙筆方式實施評量，學生之評量表現如下：

表 7-1 等差問題之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
等差 1	21	8	6	9	6	6	2	29
等差 2	23	6	7	11	5	5	1	29
合計	44	14	13	20	11	11	3	58
百分比	76%	24%	22%	35%	19%	19%	5%	100%

表 7-2 等差問題「解題正確者」之解題說理表現

	解題說理 Level 1~5				備註
	5	4	3	合計	
等差 1	6	9	6	21	
百分比	29%	42%	29%	100%	
等差 2	7	11	5	23	
百分比	30%	48%	22%	100%	
合計	13	20	11	44	
百分比	30%	45%	25%	100%	

由表 7-1，得知等差問題之整體評量表現為正確解題 76%，錯誤解題 24%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 57%，也就是說有 43% 的學生不太會說理。

由表 7-2，發現在「解題正確者」中，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 75%，亦即尚有 25% 的學生能正確解題，但說理能力尚待加強。

(二) 乘法巧算：教學－紙筆評量 (09/30)

乘法巧算採取第二類之教學評量流程：由於此類題型對學生而言較為簡單，因此進行實體教學，引導學生在實體教室進行解題、討論和質疑辯證之後，直接以紙筆方式實施評量，與第一類相較，少了多媒體討論區解題及針對學生之解題迷思進行再次教學兩個向度，學生之評量表現如下：

表 7-3 乘法巧算之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
乘法 1	27	3	12	6	9	2	1	30
乘法 2	26	4	10	6	10	2	2	30
合計	53	7	22	12	19	4	3	60
百分比	88%	12%	36%	20%	32%	7%	5%	100%

表 7-4 乘法巧算「解題正確者」之解題說理表現

	解題說理 Level 1~5				備註
	5	4	3	合計	
乘法 1	12	6	9	27	
百分比	44%	23%	33%	100%	
乘法 2	10	6	10	26	
百分比	38%	24%	38%	100%	
合計	22	12	19	53	
百分比	41%	23%	36%	100%	

由表 7-3，得知乘法巧算之整體評量表現為正確解題 88%，錯誤解題 12%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 56%，也就是說有 44% 的學生不太會說理。

由表 7-4，發現在「解題正確者」中，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 64%，亦即尚有 36% 的學生能正確解題，但說理能力尚待加強。

(三) ooxx 規律：**教學－多媒體解題 (10/03)－教學－紙筆評量 (10/23)**

ooxx 規律採取第一類之教學評量流程：首先進行教學，引導學生在實體教室進行解題、討論和質疑辯證，其次提供多媒體討論區讓學生作解題練習和同儕互動，然後根據學生之解題迷思進行再次教學，最後以紙筆方式實施評量，學生之評量表現如下：

表 7-5 ooxx 規律之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
ooxx1	27	3	12	7	8	2	1	30
ooxx2	21	9	8	7	6	5	4	30
合計	48	12	20	14	14	7	5	60
百分比	80%	20%	34%	23%	23%	12%	8%	100%

表 7-6 ooxx 規律「解題正確者」之解題說理表現

	解題說理 Level 1~5				備註
	5	4	3	合計	
ooxx 規律 1	12	7	8	27	
百分比	44%	26%	30%	100%	
ooxx 規律 2	8	7	6	21	
百分比	38%	33%	29%	100%	
合計	20	14	14	48	
百分比	42%	29%	29%	100%	

由表 7-5，得知 ooxx 規律之整體評量表現為正確解題 80%，錯誤解題 20%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 57%，也就是說有 43% 的學生不太會說理。

由表 7-6，發現在「解題正確者」中，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 71%，亦即尚有 29% 的學生能正確解題，但說理能力尚待加強。

(四) 和差問題：**多媒體解題 (10/16) – 教學 – 紙筆評量 (10/23)**

和差問題採取第三類之教學評量流程：嘗試不先作教學，直接引導學生在多媒體討論區作解題練習和同儕互動 (10/16)，然後根據學生之解題迷思進行實體教學，最後以紙筆方式實施評量 (10/23)，由於和差問題的解題和推理對學生而言難度較高，因此，首次在多媒體解題時錯誤率偏高，在根據學生之迷思概念進行教學和澄清之後，學生的答對率大幅提昇，學生之評量表現如下：

表 7-7 和差問題之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
和差 1	24	7	11	11	2	6	1	31
和差 2	26	5	10	12	2	3	3	31
合計	50	12	21	23	4	9	4	62
百分比	81%	19%	34%	37%	6%	15%	6%	100%

表 7-8 和差問題「解題正確者」之解題說理表現

	解題說理 Level 1~5				備註
	5	4	3	合計	
和差問題 1	11	11	2	24	
百分比	46%	46%	8%	100%	
和差問題 2	10	12	2	24	
百分比	42%	50%	8%	100%	
合計	21	23	4	48	
百分比	44%	48%	8%	100%	

由表 7-7，得知和差問題之整體評量表現為正確解題 81%，錯誤解題 19%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 71%，也就是說有 29% 的學生不太會說理。

由表 7-8，發現在「解題正確者」中，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的高達 92%，亦即只有 8% 的學生能正確解題，但說理能力尚待加強。

(五) 倍數問題：教學—多媒體解題 (11/13) —教學—紙筆評量 (延後測) (01/02)

倍數問題採取第一類之教學評量流程：首先進行教學，引導學生在實體教室進行解題、討論和質疑辯證，其次提供多媒體討論區讓學生作解題練習和同儕互動，然後根據學生之解題迷思進行再次教學，最後以紙筆方式實施評量 (延後測)。由於學生在多媒體解題時表現良好，通過率甚高，因此不馬上作紙筆評量，而以延後測方式實施紙筆評量 (1/2)，經過一個多月之後，學生的錯誤率雖然比第一次之多媒體解題表現差，但是筆者認為這才是學生真正能力所在，學生之評量表現如下：

表 7-9 倍數問題之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
倍數 1	24	8	6	17	1	2	6	32
倍數 2	22	10	13	7	2	2	8	32
合計	46	18	19	24	3	4	14	64
百分比	72%	28%	30%	37%	5%	6%	22%	100%

表 7-10 倍數問題「解題正確者」之解題說理表現

	解題說理 Level 1~5				備註
	5	4	3	合計	
倍數問題 1	6	17	1	24	
百分比	25%	70%	5%	100%	
倍數問題 2	13	7	2	22	
百分比	59%	32%	9%	100%	
合計	19	24	3	46	
百分比	41%	52%	7%	100%	

由表 7-9，得知和差問題之整體評量表現為正確解題 72%，錯誤解題 28%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 67%，也就是說有 33% 的學生不太會說理。

由表 7-10，發現在「解題正確者」中，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的高達 93%，亦即只有 7% 的學生能正確解題，但說理能力尚待加強。

總之，學生在五個題型的解題表現，解題正確比例維持在七八成之間，解題說理表現達到 Level 5 和 4 的比例則由 56%、57% 提升到 67%、71%，而「解題正確者」之解題說理表現達到 Level 5 和 4 的比例則由 64%、75% 提升到 92%、93%，亦即能正確解題，但說理能力尚待加強的學生只剩下 7%、8%，可見學生之說理能力有長足之進步，學生之解題與說理能力幾乎已能並駕齊驅。

二、學生之「解題類型分析」與「解題示例萃取」

此次評量內容包含：等差問題、乘法巧算、 $ooxx$ 規律、和差問題和倍數問題等五種題型，每一個題型 2 題。茲將學生解題類型分析和解題示例萃取，逐題歸納如下：

(一) 等差問題之解題類型分析

等差問題第一題： $2+4+6+8+\dots+54+56+58+60=(\quad)$ ，答案正確者的解題類型有四種，答案錯誤者的解題類型有二種，如下表，其中使用類型一的人數最多，採此類型的學生多數能清楚說明解題想法，但仍有 6 位學生不太會說理，而採用類型二的學生則多數呈現答案正確但是不會說理的情況。

表 7-11 等差問題第一題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正 確	類型一	$60 \div 2 = 30$ ， $30 \div 2 = 15$ $(2+60) \times 15 = 62 \times 15 = 930$	5	8	5	1		19
	類型二	$60+2=62$ ， $60 \div 2=30$ $62 \times 30 = 1860$ ， $1860 \div 2 = 930$		1	1	4		6
	類型三	一個數一個數慢慢加	1					1
	類型四	四則混合逐次減項之計算過程格式錯誤				1		1
答案 錯 誤	類型一	$(60+2) \times 30 = 1860$					1	1
	類型二	$(2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30) \times 2 = 480$					1	1
計			6	9	6	6	2	29

答案錯誤類型一： $(60+2) \times 30 = 1860$ ，學生的錯誤點在於將兩兩一組之組數 15 誤植為 30。

答案錯誤類型二： $(2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30) \times 2 = 480$ ，學生的錯誤點在於將 2 加到 30 的數當作 2 加到 60 的一半。

答案正確類型一、二：有 5 位學生答案正確，但說理錯誤，這類型的學生的學習只學到表面之解題方法並未深入瞭解解題內涵，值得關注。

答案正確類型四：學生列式正確，但是在四則混合逐次減項之計算過程格式錯誤，數學算式之記錄格式方面需要再加強。

等差問題第二題： $5+6+7+8+\dots+87+88+89+90=(\quad)$ ，答案正確者的解題類型有四種，答案錯誤者的解題類型有二種，如下表，其中使用類型一、二的人數相當接近，採類型一的學生多數能清楚說明解題想法，而採用類型二的學生則有半數呈現答案正確但是不會說理的情況，類型一和類型三分別有一位學生答案正確，但說理錯誤，這類型的學生的學習只學到表面之解題方法並未深入瞭解解題內涵。

表 7-12 等差問題第二題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正 確	類型一	$90 \div 2 = 45$ ， $(1+90) \times 45 = 4095$ $1+2+3+4=10$ ， $4095-10=4085$	5	6		1		12
	類型二	$90-4=86$ $86 \div 2=43$ $(90+5) \times 43=4085$	2	4	5			11
	類型三	$90-4=86$ ， $90+5=95$ $95 \times 86=8170$ ， $8170 \div 2=4085$		1		1		2
	類型四	$\frac{(6+90) \times 84}{2} = 4080$ $4080+5=4085$				2		2
答案 錯 誤	類型一	$90 \div 2 = 45$ ， $(90+1) \times 45 = 4095$ $1+2+3+4+5=15$ ， $4095-15=4080$				1		1
	類型二	$90+5=95$ ， $90 \div 2=45$ $95 \times 45=4095$					1	1
計			7	11	5	5	1	29

答案錯誤類型一： $90 \div 2 = 45$ ， $(90+1) \times 45 = 4095$ ， $1+2+3+4+5=15$ ， $4095-15=4080$ 。學生的錯誤點在於將應扣掉的數 $1+2+3+4$ 誤植為 $1+2+3+4+5$ 。

答案錯誤類型二： $90+5=95$ ， $90 \div 2=45$ ， $95 \times 45=4095$ 。學生的錯誤點在於只注意到最後一個數 90，忽略前面是從 5 開始，而將項數 43 誤植為 45。

值得一提的是，答案正確類型四： $(6+90) \times 84 \div 2 = 4080$ ， $4080+5=4085$ ，學生的說法如下：「我會加 6 是因為加 5 時， $\div 2$ 不會數， 84 是 $=90-6=84$ ，因為我開頭是加 6，而不是 5，所以減 6， $\div 2=(6+90) \times 84 \div 2=4080$ ， 4080 再加上 $5=4085$ ，就是答案」，其中提到【我會加 6 是因為加 5 時， $\div 2$ 不會數】，顯現學生的計算能力不佳，為什麼學生會說【加 5 時， $\div 2$ 不會數】，原因是其在項數的處理上有迷思概念，認為從 5 開始算，項數是 $90-5$ ，不會算 $(5+90) \times 85 \div 2$ ，而改採 $(6+90) \times 84 \div 2$ ，此為第一個錯誤，緊接著又將 $(6+90) \times 84 \div 2$ 之答案算錯，寫成 4080，連錯兩次之後竟然獲致正確答案，一切純屬巧合。

(二) 等差問題之解題示例萃取 (Level 1-5 各取一例為代表)

表 7-13 等差問題第一題之解題示例萃取

等差問題 第一題		2+4+6+8+-----+54+56+58+60= () 請寫出你的做法和想法！加油！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S25)	做法	60÷2=30 30÷2=15 60+2=62 62×15=930 A:930	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	每一個數都是 2 的倍數，所以 60 除以 2 等於 30，也就是有 30 個 2 的倍數，每 2 個一組，所以 30 再除以 2 等於 15，也就是 15 組，每一組加起來都是 62，所以 62 乘以 15 等於 930。	
Level 4 (S11)	做法	30÷2=15 (2+60)×15=930 A:930	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。
	想法	每個數都是 2 的倍數，所以有 30 個數， <u>可是 30 還要除 2，所以是 15</u> ，然後 2 加 60 再乘 15 等於答案。	
Level 3 (S26)	做法	(2+60) ×15 =62×15 =930 A : 930	答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯為文字。
	想法	就是呢，先把 2 和 60 加起來就等於 62，然後 62 再乘 15 答案就會出現了	
Level 2 (S28)	做法	(2+60)×60÷2 =62×30 =1860 1860÷2=930 A : 930	答案正確，計算過程正確，文字說理錯誤。
	想法	2+60 是 62， <u>62×30 是有 30 個 62</u> ， <u>÷2 是因為每個數都差 2</u> 。	
Level 1 (S15)	做法	(2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30)×2=480 A : 480	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	因為 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+24+26+28+30 是一半， <u>所以要×2</u>	

表 7-14 等差問題第二題之解題示例萃取

等差問題 第二題		5+6+7+8+-----+87+88+89+90=() 請寫出你的做法和想法！加油！		
解題示例萃取				評分說明
Level 5 (S31)	做法	$(1+90) \times (90 \div 2) - (1+2+3+4)$ $=91 \times 45 - 10$ $=4095 - 10 = 4085$ A: 4085		答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	1+90=91，2+89=91，以此類推， $90 \div 2 = 45$ ，因為共有 45 個 91，所以是 91×45 ，但因為題目並沒有 1+2+3+4，所以 91×45 後，還要減掉 1+2+3+4。		
Level 4 (S17)	做法	高 $90 \div 1 = 90$ ， $90 - 4 = 86$ $(5+90) \times 86 \div 2 = (4085)$ $= 95 \times 43$ $= 4085$ A: 4085		答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。(計算記錄格式錯誤)
	想法	先把 90+5，因為 90+5 一組，89+6 一組……以此類推，因為把 2 個 2 個一組，所以把 $86 \div 2$ ，又因為是從 5 開始的，有 4 個數沒數到，就把 $90 - 4$ (先-4 歐~~)，所以 $(5+90) \times 43$ 就是答案了!!		
Level 3 (S14)	做法	$90 - 4 = 86$ $5 + 90 \times 43 = 4085$ A: 4085		答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯為文字。
	想法	先 $90 - 4$ 答案出來以後再 $\div 2$ ，再把 $5 + 90$ 答案出來之後，2 個再相乘。		
Level 2 (S05)	做法	$90 \div 2 = 45$ $(90+1) \times 45 = 4095$ $1+2+3+4+5=15$ $4095 - 15 = 4080$ A: 4080		答案不正確，但包含正確的數學推理。
	想法	$90 \div 2$ 是把 90 個數字除 2，是因為 90 個數字有 45 對， $(90+1) \times 45$ 有 45 對都是 91， <u>$1+2+3+4+5$ 是把前面沒有的數字加起來，再減掉。</u>		
Level 1 (S16)	做法	$90+5=95$ $90 \div 2 = 45$ $95 \times 45 = 4095$ A: 4095		嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	因為他們每一組的答案算出來都是 95，要算有幾組，用 $90 \div 2 = 45$ 就可以了，然後 95×45 就是答案。		

(三) 乘法巧算之解題類型分析

乘法巧算第一題： $25 \times 125 \times 28 \times 32 = ()$ ，答案正確者的解題類型有三種，答案錯誤者的解題類型有二種，如下表，其中使用類型一的人數最多，採此類型的學生也多數能清楚說明解題想法，其中有一位學生會使用 $25 \times 28 = 700$ ， $125 \times 32 = 4000$ ，但在說理過程中顯現該生不懂其意義。採用類型二的學生，雖然忘記使用 $25 \times 4 = 100$ ， $125 \times 8 = 1000$ ，進行乘法巧算，但是仍能採用較簡易的方式計算。

表 7-15 乘法巧算第一題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正 確	類型一	$25 \times 28 = 700$ ， $125 \times 32 = 4000$ $4000 \times 700 = 2800000$	11	5	6	1		23
	類型二	$25 \times 32 = 800$ ， $28 \times 125 = 3500$ $800 \times 3500 = 2800000$	1	1	2			4
	類型三	一個一個慢慢乘			1			
答案 錯 誤	類型一	$25 \times 28 = 700$ ， $125 \times 32 = 4000$ $4000 + 700 = 4700$					1	1
	類型二	$125 \times 32 = 4000$ ， $25 \times 28 = 700$ $4000 \times 700 = 280000$				1		1
計			12	6	9	2	1	29

答案錯誤類型一： $25 \times 28 = 700$ ， $125 \times 32 = 4000$ ， $4000 + 700 = 4700$ 。學生的錯誤點在於將 $4000 \times 700 = 2800000$ 誤植為 $4000 + 700 = 4700$ 。

答案錯誤類型二： $125 \times 32 = 4000$ ， $25 \times 28 = 700$ ， $4000 \times 700 = 280000$ ，學生的錯誤點在於少寫一個零。

值得一提的是，答案正確類型三：該生雖然以一個一個慢慢乘的方式進行計算，但是由於題目中並未強調一定需要用 $25 \times 4 = 100$ ， $125 \times 8 = 1000$ ，進行乘法巧算，所以仍然算是成功解題。

乘法巧算第二題： $25 \times 16 \times 36 \times 125 = (\quad)$ ，答案正確者的解題類型有三種，答案錯誤者的解題類型有三種，如下表，其中使用類型一的人數相當多，採類型一的學生多數能清楚說明解題想法，而採用類型二的學生則有超過半數呈現答案正確但是不會說理的情況。

表 7-16 乘法巧算第二題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正 確	類型一	$25 \times 4 \times 9 = 900$ ， $125 \times 8 \times 2 = 2000$ $2000 \times 900 = 1800000$	9	5	3			17
	類型二	$25 \times 16 = 400$ ， $36 \times 125 = 4500$ $400 \times 4500 = 1800000$	1	1	6			8
	類型三	一個一個慢慢乘			1			1
答 案 錯 誤	類型一	$25 \times 16 = 310$ ， $125 \times 36 = 4500$ $310 + 4500 = 4810$					1	1
	類型二	$125 \times 36 = \underline{9000}$ ， $25 \times 16 = 400$ $9000 \times 400 = 3600000$					1	1
	類型三	$25 \times 36 = 900$ ， $125 \times 16 = 2000$ $900 \times 2000 = \underline{18000000}$				2		1
計			10	6	10	2	2	29

答案錯誤類型一： $25 \times 16 = 310$ ， $125 \times 36 = 4500$ ， $310 + 4500 = 4810$ 。學生的錯誤點在於將 25×16 計算錯誤為 310，更將兩數相乘誤植為兩數相加。

答案錯誤類型二： $125 \times 36 = \underline{9000}$ ，學生的錯誤點在於以為 $125 \times 4 = 1000$ 。

答案錯誤類型三： $25 \times 36 = 900$ ， $125 \times 16 = 2000$ ， $900 \times 2000 = \underline{18000000}$ ，學生的錯誤點在於多寫一個零。

(四) 乘法巧算之解題示例萃取 (Level 1-5 各取一例為代表)

表 7-17 乘法巧算第一題之解題示例萃取

乘法巧算 第一題		25x125x28x32= () 算算看，並說出你的解題方法！GO！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S22)	做法	25x125x28x32 =25x28x125x32 =700x4000 =2800000 A:2800000	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	我的想法是 25x4=100，125x8=1000，所以變換位子成 25x28x125x32，28 是 4 的 7 倍，100x7=700，32 是 8 的 4 倍，1000x4=4000，700x4000=2800000	
Level 4 (S04)	做法	25x28=700 125x32=4000 4000x700=2800000 A:2800000	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。
	想法	28 是 7 個 4，所以是 700，32 是 4 個 8，所以是 4000，答案是 4000x700=2800000。	
Level 3 (S13)	做法	25x28=700 125x32=4000 4000x700=2800000 A:2800000	答案正確，計算過程正確，但說理簡略不清楚。
	想法	25x28 是因為乘起來=700 是整數，125x32=4000 也是整數，4000x700=2800000，這樣比較好算。	
Level 2 (S29)	做法	125x32=4000 25x28=700 4000x700=2800000	答案正確，計算過程正確，文字說理錯誤。
	想法	125x32，因為 125 它只要乘 4，他一定變成千位，32 的最小公因數是 4，所以是 4000，25 它只要乘有關 8 的數，那個數就是百位，所以 2 數加起來就是 2800000。	
Level 1 (S07)	做法	25x28=700 125x32=4000 4000+700=4700	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	先算 25x28=700 再算 125x32=4000 再把 4000+700=4700	

表 7-18 乘法巧算第二題之解題示例萃取

乘法巧算 第二題		$25 \times 16 \times 36 \times 125 = (\quad)$ 算算看，並說出你的解題方法！GO！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S02)	做法	$25 \times 4 \times 9 = 900$ $125 \times 8 \times 2 = 2000$ $2000 \times 900 = 1800000$ A: 1800000	
	想法	因為 $25 \times 4 = 900$ ，36 能拆成 4×9 ，所以， $25 \times 4 \times 9 = 900$ 因為 $125 \times 8 = 1000$ ，16 能拆成 4×9 ，所以， $125 \times 8 \times 2 = 2000$ $2000 \times 900 = 1800000$ 。	
Level 4 (S32)	做法	$25 \times 16 = 400$ $36 \times 125 = 4500$ $400 \times 4500 = 1800000$ A: 1800000	
	想法	$25 \times 16 = 400$ ， $36 \times 125 = 4500$ ，一共有 4 個 0，先把 4 個 0 拿掉， $4 \times 45 = 180$ ，180 再加 4 個 0，就是答 案 1800000。	
Level 3 (S06)	做法	$900 \times 2000 = 1800000$ A: 1800000	
	想法	因為 $36 \div 4$ 可以整除，答案是 9，所以是 900， 因為 $16 \div 8$ 可以整除，答案是 2，所以是 2000， 然後再 $2000 \times 900 = 1800000$ 就是答案了。	
Level 2 (S34)	做法	$25 \times 36 = 900$ $125 \times 16 = 2000$ $900 \times 2000 = 18000000$ A: 18000000	
	想法	把 $25 \times 36 = 900$ $125 \times 16 = 2000$ $900 \times 2000 = 18000000$ 答案就出來了	
Level 1 (S29)	做法	$125 \times 36 = 9000$ $25 \times 16 = 400$ $9000 \times 400 = 3600000$ A: 3600000	
	想法	125 它只要乘 4 的倍數他一定是千位，而 25 只 要乘 8 的倍數，它也會變成百位，以此類推， 就是 3600000。	

(五) ooxX 規律之解題類型分析

ooxX 規律第一題：OOOXXXXOOOXXXX，如此有規律的排下去，第 52 個是 o 還是 x？
 答案正確者的解題類型有五種，答案錯誤者的解題類型只有一種，如下表：

表 7-19 ooxX 規律第一題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正 確	類型一	$52 \div 7 = 7 \dots 3$ OOOXXXX 123 A：o	7	4				11
	類型二	$52 \div 14 = 3 \dots 10$ A：第 52 個是 o	2					2
	類型三	OOOXXXX 是 7 個， $7 \times 7 = 49$ $52 - 49 = 3$ A：o	3					3
	類型四	OOOXXXXOOOXXXXOOOXXXXOOOXXXXOOOXXXX XOOOXXXXOOOXXXXoo□ A：o		1	7	2		10
	類型五	$3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 +$ $3 + 4 + 3 + 4 = 49$ 49 是 x， $49 + 3 = 52$ ，52 是 o A：o		2	1			3
答案 錯 誤	類型一	$52 \div 3 = 17 \dots 1$ $52 \div 4 = 13$ $4 = x$ A：x					1	1
計			12	7	8	2	1	30

答案正確者的解題類型有五種，多數學生以 7 個一組的方式來處理，由於題目畫了 OOOXXXXOOOXXXX，因此有兩位學生以 14 個一組的方式來處理。從類型三到五，一共有 16 位學生以土法煉鋼方式解題，可見學生能夠盡量想辦法解題。

(六) ooxX 規律之解題示例萃取 (Level 1-5 各取一例為代表)

表 7-21 ooxX 規律第一題之解題示例萃取

OOXX 規律 第一題		OOOXXXXXOOOXXXXX...，如此有規律的排下去， 第 52 個是 o 還是 x？請寫出你的做法和想法！加油！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S31)	做法	$52 \div 7 = 7 \dots 3$ OOOXXXXX 123 A: o	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	因為一組 OOOXXXXX 共有 7 個符號，第 52 個是 7 組多 3 個，而每組第 3 個是 o，所以答案是 o	
Level 4 (S15)	做法	$3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4$ $= 49$ 49 是 x $49 + 3 = 52$ 52 是 o A: o	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。
	想法	因為 o 是 3 個一跳，x 是 4 個一跳，所以要 3 + 4，3 + 4 一對，到 52 是 o	
Level 3 (S05)	做法	OOOXXXXXOOOXXXXXOOOXXXXXOOOXXXXXOOOXXXXXOOOXXXXXOOOXXXXX XX OOXXXXX OOOXXXXX	答案正確，計算過程正確，但文字說理簡略不清楚。
	想法	我先把 o 和 x 畫到第 52 個就是答案了	
Level 2 (S36)	做法	A: 52 是 o	答案正確，無計算過程，文字說理簡略不清楚。
	想法	一個一個算。	
Level 1 (S21)	做法	$52 \div 3 = 17 \dots 1$ $52 \div 4 = 13$ $4 = x$ A: x	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	我用 $52 \div 3 = 17 \dots 1$ 有餘數，所以不是 0， $52 \div 4 = 13$ 沒有餘數，所以是 x，x 就是答案。	

(七) 和差問題之解題類型分析

和差問題第一題：剛考完試，小丸子國語、數學兩科合起來是 192 分，國語比數學多 4 分，請問小丸子國語、數學各考幾分？答案正確者的解題類型有二種，答案錯誤者的解題類型也有二種，如下表：

表 7-23 和差問題第一題 解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正確	類型一	$192 - 4 = 188$ $188 \div 2 = 94$ $94 + 4 = 98$ A：國 98 分 數 94 分	8	5	1			14
	類型二	做法一 ： $192 \div 2 = 96$ $4 \div 2 = 2$ $96 - 2 = 94$ $96 + 2 = 98$ A：國：98 分 數：94 分	3	6	1	1		12
答案 錯誤	類型一	計算錯誤				5		5
	類型二	$192 \div 2 = 96$ $96 + 4 = 92$ $92 - 4 = 88$ A：國 92 分，數 88 分					1	1
計			11	11	2	6	1	31

答案錯誤類型一：學生的錯誤點在於計算錯誤，甚為可惜，也凸顯計算能力需要再加強。

答案錯誤類型二： $192 \div 2 = 96$ ， $96 + 4 = 92$ ， $92 - 4 = 88$ ，A：國 92 分，數 88 分。學生的錯誤點在於誤以為相差四分需要加 4，減 4，也缺乏完成解題活動後，再次檢查驗算之習慣。

值得一提的是，答案正確者解題類型有兩類，人數不相上下，也大多能清楚說明自己的解題策略和想法，。

和差問題第二題：大雄把 800cc 的飲料裝成兩杯，大杯比小杯多 40cc，請問大杯，小杯飲料各是多少 cc？答案正確者的解題類型有二種，答案錯誤者的解題類型有二種，如下表：

表 7-24 和差問題第二題 解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案 正確	類型一	$800 - 40 = 760$ $760 \div 2 = 380$ $380 + 40 = 420$ A：大杯：420cc 小杯：380cc	6	7		1		13
	類型二	$800 \div 2 = 400$ $40 \div 2 = 20$ $400 - 20 = 380 \cdots$ 小 $400 + 20 = 420 \cdots$ 大 A：大杯：420cc 小杯：380cc	4	5	3	1		13
答案 錯誤	類型一	$800 - 40 = 760$ $760 \div 2 = 380$ $380 + 40 = 420$ A：大：380cc 小：420cc				1		1
	類型二	答案不正確，觀念錯誤。					3	4
計			10	12	3	3	3	31

答案錯誤類型一：學生的錯誤點在於大小杯之數量錯置，甚為可惜。

答案錯誤類型二：三個學生雖然學生有意願嘗試作答，但是答案不正確，觀念錯誤。

值得一提的是，答案正確者解題類型有兩類，人數不相上下，也大多能清楚說明自己的解題策略和想法。

(八) 和差問題之解題示例萃取 (Level 1-5 各取一例為代表)

表 7-25 和差問題第一題之解題示例萃取

和差問題 第一題		剛考完試，小丸子國語、數學兩科合起來是 192 分，國語比數學多 4 分，請問小丸子國語、數學各考幾分？ 請寫出你的做法和想法！加油！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S23)	做法	$192 - 4 = 188$ $188 \div 2 = 94 \cdots$ 數 $94 + 4 = 98 \cdots$ 國 A： 數：94 分 國：98 分	
	想法	先把 4 分給國語，再用扣掉的分數除 2，就是各科平均分數，也就是數學的分數，為什麼要加 4？因為國語比數學多 4 分，所以要加 4。	
Level 4 (S12)	做法	$192 - 4 = 188$ $188 \div 2 = 94$ $94 + 4 = 98$ A：國：98 分 數：94 分	
	想法	先把 192 分減 4，是因為先把國語多的分數先減掉 = 188， $188 \div 2$ 是因為兩科的分數，再把國語 94 分加 4 分，是因為國語多數學 4，所以要加 4。	
Level 3 (S02)	做法	$192 \div 2 = 96$ $4 \div 2 = 2$ $96 - 2 = 92$ $96 + 2 = 98$ A：國 98 分 數 94 分	
	想法	我先把 $4 \div 2 = 2$ ，再 $96 - 2 = 94$ 就是數學成績，再 $96 + 2 = 98$ 就是國語的成績了。	
Level 2 (S07)	做法	$192 - 2 = 188$ $188 \div 2 = 92$ $92 + 4 = 96$ A：國語 96 分 數學 92 分	
	想法	先把 4 分給國語， $188 \div 2 = 92 =$ 數學的分數， $92 + 4 =$ 國語的分數 = 96。	
Level 1 (S03)	做法	$192 \div 2 = 96$ $96 + 4 = 92$ $92 - 4 = 88$ A：國 92 分， 數 88 分	
	想法	因為 192 除 2 等於 96 所以	

表 7-26 和差問題第二題之解題示例萃取

和差問題 第二題		大雄把 800cc 的飲料裝成兩杯，大杯比小杯多 40cc，請問大杯，小杯飲料各是多少 cc？ 請寫出你的做法和想法！加油！		
解題示例萃取				評分說明
Level 5 (S35)	做法	$800-40=760$ $760\div 2=380$ $380+40=420$ A：大杯：420cc 小杯：380cc		答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	我把 40 cc 先分給大杯的，然後剩下的再平分，再將原來大杯的 40 cc 加回去，所以大杯是 420 cc，小杯是 380cc。		
Level 4 (S32)	做法	$800-40=760$ $760\div 2=380$ $380+40=420$ A：小：420cc 大：380cc		答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。 (有筆誤)
	想法	$800-40=760$ 就是大小杯合起來是 800 cc，減 40cc 是因為大杯比小杯多 40cc 就是 760， $760\div 2=380$ ，760 除以 2 等於 380，就等於小杯的 cc，之後再把 $380+40$ 等於小杯的 cc。		
Level 3 (S16)	做法	$800\div 2=400$ $400+20=420$ $400-20=380$ A：大：420cc 小：380cc		答案正確，計算過程正確，但文字說理簡略不清楚。
	想法	因為 800cc 是兩杯裝起來的，所以大杯會比小杯大，40cc 是一個要 +20 一個減 20。		
Level 2 (S13)	做法	$800-40=760$ $760\div 2=320$ $320+40=360$ $360+20=380$ $380+40=420$ A：大：420cc 小：380cc		答案正確，計算過程錯誤，文字說理簡略不清楚。
	想法	因 $800-40$ 是因為大杯的飲料多 40cc，所以才把 $800cc-40=760$ ， $760\div 2$ 就是小杯飲料的答案，等於，+40 大杯是 $380cc+40cc=420cc$ 就是答案。		
Level 1 (S34)	做法	$800\div 2=400$ $400-40=300$ A：大杯：400cc 小杯：300cc		嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	先把 $800\div 2=400$ 400 減 $40=300$ A：大：400cc 小：300cc		

(九) 倍數問題之解題類型分析

倍數問題第一題：紅球、黃球共 240 個，紅球的數量是黃球的 5 倍，請問紅球、黃球各有幾個？答案正確者的解題類型有二種，答案錯誤者的解題類型有三種，如下表：

表 7-27 倍數問題第一題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案正確	類型一	紅 1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $5+1=6$ $240\div 6=40$ $40\times 5=200$ A：紅球 200 個，黃球 40 個	6	4				10
	類型二	紅 1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $240\div 6=40$ $40\times 5=200$ A：紅 200 個，黃 40 個		13	1			14
答案錯誤	類型一	$240\div 6=40$ $40\times 5=200$ A：紅：40，黃：200				2		2
	類型二	$240\div 5=48$ ， $240-48=192$ A：48 紅球，192 黃球					3	3
	類型三	$240\div 2=120$ ， $120\times 5=600$ A：紅球：600 個，黃球：120 個					3	3
計		6	17	1	2	6	32	

答案錯誤類型一：學生的錯誤點在於紅球、黃球之數量錯置，甚為可惜。

答案錯誤類型二：學生的錯誤點在於將紅球的數量是黃球的 5 倍以「 $240\div 5$ 」處理，然後再繼續作演算。

答案錯誤類型三：學生的錯誤點在於認為有兩種球所以要先除以 2，然後再繼續作演算。學生說法如下：「因為紅、黃球共 240 個，要平均二等份，然後紅球是黃球的 5 倍，所以乘以 5 答就出來了」。

答案正確類型一、二之差別在於類型一計算過程正確完整，類型二計算過程正確不夠完整。

倍數問題第二題：紅豆 180 公斤，分成 A、B、C 三包，A 是 B 的 3 倍，B 比 C 多 20 公斤，請問 A、B、C 各是多少公斤？答案正確者的解題類型有二種，答案錯誤者的解題類型有三種，如下表：

表 7-28 倍數問題第二題解題類型分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數					
			5	4	3	2	1	計
答案正確	類型一	$180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 - 20 = 20$ $40 \times 3 = 120$ A：A120 公斤，B40 公斤，C20 公斤	13	6	2			21
	類型二	$200 \div 5 = 40$ $40 \times 3 = 120$ $40 - 20 = 20$ $120 + 40 + 20 = 180$ A：A120 公斤，B40 公斤，C20 公斤		1				1
答案錯誤	類型一	答寫錯				2		2
	類型二	以 $180 \div 3 = 60$ 為起始，再做演算					4	4
	類型三	答案不正確，觀念錯誤					4	4
計			13	7	2	2	8	32

答案錯誤類型一：學生的錯誤點在於答案之答案或單位錯置，甚為可惜。

答案錯誤類型二：學生的錯誤點在於認為要分成三包，所以要先除以 3，然後再繼續作演算。

答案正確類型一、二之差別在於類型一計算過程正確完整，類型二計算過程正確不夠完整。

(十) 倍數問題之解題示例萃取 (Level 1-5 各取一例為代表)

表 7-29 倍數問題第一題之解題示例萃取

倍數問題 第一題		紅球、黃球共 240 個，紅球的數量是黃球的 5 倍，請問紅球、黃球各有幾個？ 算算看，並說出你的解題方法！GO！	
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S19)	做法	1-1-1-1-1-1 紅 1-1 黃 $5+1=6$ $240\div 6=40$ $40\times 5=200\cdots$ 紅 $40\times 1=40\cdots$ 黃 A: 紅 200 個，黃 40 個	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	紅、黃球一共有 240 個，紅球是黃球的五倍，所以紅球有 5 小段，黃球只有一小段，加起來總共有 6 小段，把 240 (紅球和黃球合起來的數量) $\div 6=40$ ，所以一小段有 40 顆， $40\times 5=200$ ，200 是紅球的數量， $40\times 1=40$ ，40 是黃球的數量。	
Level 4 (S28)	做法	紅 1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $240\div 6=40$ $40\times 5=200$ A: 紅: 200 個，黃: 40 個	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。
	想法	紅球、黃球一共有 240 個，一共有 6 倍，所以除以 6 就是一倍的數是 40，紅球有 5 倍就乘以 5 就是 200，黃球是 1 倍就乘以 1 就是 40。	
Level 3 (S07)	做法	紅 1-1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $240\div 6=40$ $40\times 5=200$ A: 紅: 200，黃: 40	答案正確，計算過程正確，但文字說理簡略不清楚。
	想法	$240\div 6=40$ ，40 是黃球，然後 $40\times 5=200$ ，200 是紅球。	
Level 2 (S02)	做法	紅 1-1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $240\div 6=40$ $40\times 5=200$ $40=$ 紅球 $200=$ 黃球 A: 紅球 40，黃球 200	答案不正確，但包含正確的數學推理。
	想法	黃球是紅球的 5 倍，把 $240\div 6=40$ ，40 就是紅球； $40\times 5=200$ ，200=黃球	
Level 1 (S13)	做法	紅 1-1-1-1-1-1-1-1 黃 1-1 $240\div 2=120$ $120+50=170$ $120\div 50=70$ A: 紅球 170 個，黃球 70 個	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	因為他說有黃、紅 2 種顏色，所以除 2 等於 120，然後它說紅球是黃球的 5 倍，所以把 $120+50=170$ ，再把 $120-50=70$ 這樣就是答案。	

表 7-30 倍數問題第二題之解題示例萃取

倍數問題 第二題		紅豆 180 公斤，分成 a、b、c 三包，a 是 b 的 3 倍，b 比 c 多 20 公斤，請問 a、b、c 各是多少少公斤？ 算算看，並說出你的解題方法！GO！	評分說明
解題示例萃取			評分說明
Level 5 (S05)	做法	$180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 - 20 = 20$ $40 \times 3 = 120$ A: A 120 公斤, B 40 公斤, C 20 公斤	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。
	想法	我先把 C 加 20 是因為 C 少了 20kg，加回 20kg，A、B、C 的每一段就一樣長，這樣比較好算。200 除 5 是因為 A, B, C 加起來是 5 倍，再把 $40 - 20$ 是因為 C 剛才借了 20，所以現在要減 20，再把 $40 \times 3 = 120$ 就是 A 的答案。	
Level 4 (S18)	做法	$180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 \times 3 = 120$ $40 - 20 = 20$ A: A 120 公斤 B 40 公斤 C 20 公斤	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。(有筆誤)
	想法	先把圖畫出來，因為 C 只差 B 20 公斤，所以加 20 等於 $180 + 20 = 200$ ，A 是 B 的 3 倍，B 比 C 多 20， <u>全加起來等於 5</u> ，然後 $200 \div 5 = 40$ ，A 是 3 倍，所以 $40 \times 3 = 120$ ，B 是 40，因為 C 比 B 少 20kg，所以 $40 - 20$ 等於 20，答案就出來了。	
Level 3 (S36)	做法	$180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 - 20 = 20$ $40 \times 3 = 120$ A: A : 120 kg, B : 40 kg, C : 20 kg	答案正確，計算過程正確，但文字說理簡略不清楚。
	想法	在 $180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 - 20 = 20$ $40 \times 3 = 120$	
Level 2 (S12)	做法	$180 + 20 = 200$ $200 \div 5 = 40$ $40 \times 3 = 120$ A : A : 120 , B : 40 , C : 30	答案不正確，但包含正確的數學推理。
	想法	我是先把 $180 + 20$ 是因為先算出全部，200 除 5 是因為要算出 B 的答案和一格是幾公斤，答 40， 40×3 是因為 A 是 B 的 3 倍。	
Level 1 (S02)	做法	$180 \div 6 = 30$ $30 \times 3 = 90$ $30 + 20 = 60$ A : A : 90 , B : 60 , C : 30	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	紅豆 180，A 是 B 的 3 倍是 90，B 比 C 多 20 公斤是 60，C 是 30。	

捌、分享與建議

一、實施 QUASAR 紙筆認知評量，遭遇的困難與解決策略

(一) 遭遇的困難

實施 QUASAR 紙筆認知評量，首先遭遇到的困難是學生的文字敘述說理能力不佳，影響評量的進行。雖然小六學生已有相當多參與數學評量的經驗，但是在其國小六年的學習生涯中，數學評量方式不外乎選擇、填空、計算、繪圖、測量和解題等，鮮少進行數學說理之評量。因此，筆者在實施 QUASAR 紙筆認知評量方案初期，發現多數學生能夠正確解題，但是不知如何說明算式的意義，有的學生甚至照著算式記錄一句一句翻譯成文字，完全不見數學說理的痕跡，由於學生的「解題能力」和「說理能力」落差很大，以致 QUASAR 紙筆認知評量之實施受到考驗。

實施 QUASAR 紙筆認知評量的第二個困難是評分規準 5 個 Level 之分際難以掌握，影響評分的信度。雖然 QUASAR 紙筆認知評量明訂 5 個 Level 之評分規準，然而筆者真正進行評分時，常常在 Level 1-5 的選定之間徘徊難以下筆，評閱一份考卷需要花很長的時間，更令筆者苦惱的是，當過了一些時日，再度評閱同一份試卷時，會出現前後評分結果不一的情況，評分規準內涵之難以掌握，讓 QUASAR 紙筆認知評量之實施再一次受到考驗。

(二) 解決策略

針對學生文字敘述說理能力不佳之問題，筆者採三部曲之解決策略，首先透過教學活動培養學生口語說數學的能力，其次引導學生到多媒體討論區練習解題說理和討論，提供學生更多練習數學說理與討論的機會，然後根據學生在多媒體討論區的表現，配合評分規準說明其優點和待改進之處，以此三部曲導入 QUASAR 紙筆認知評量，結果顯示學生的文字敘寫和說理能力呈現大幅之進步。

關於評分規準 5 個 Level 之分際難以掌握之問題，則分兩步驟進行解決，首先將重點放在「評分規準之熟悉與掌握」，做法是在評分時除了打上分數還附上評語，如此一來，除了可以幫助自己迅速掌握評分規準之內涵和 5 個 Level 的分際之外，更可以提供自己隨時進行檢核，其次是透過「一份試卷評分兩次」之方式尋求前後評分之一致。

二、實施 QUASAR 紙筆認知評量，資料的運用與延展

實施 QUASAR 紙筆認知評量，將學生之解題與說理資料依 Level 1 到 5 分類整理之後，發現 Level 2 和 1 之錯誤解法，正是編製選擇題「誘答選項」之最佳參考，而將學生之正確解題和錯誤解法相互搭配，則可以進行複式評量試題之編製和研發。

(一) 選擇題編製

關於選擇題的編製，最難的地方就在於選項答案數據之設定，而 Level 2 和 1 之錯誤解答正是選項答案數據之最佳參考來源，筆者根據 QUASAR 紙筆認知評量資料，編製數題選擇題，茲列舉一二如下：

(1) $2+4+6+8+\dots+56+58+60=?$ (1) 1860 (2) 1829 (3) 1798 (4) 930

學生解題分析與選項數據設計				
正確解題	$60 \div 2 = 30, 30 \div 2 = 15$ $2 + 60 = 62$ $62 \times 15 = 930$		$60 \div 2 = 30$ $(2 + 60) \times 30 \div 2 = 930$	
錯誤點	$2 + 60 = 62$ $62 \times \boxed{30} = 1860$	$(2 + 60) \times \boxed{60} \div 2 = 1860$	$(2 + 60) \times \boxed{58} \div 2 = 1798$	$(2 + 60) \times \boxed{59} \div 2 = 1829$

(2) $5+6+7+8+\dots+38+39+40=?$ (1) 787.5 (2) 810 (3) 820 (4) 900

學生解題分析與選項數據設計				
正確解題	$5 + 40 = 45$ $40 - 4 = 36$ $36 \div 2 = 18$ $45 \times 18 = 810$		$40 - 4 = 36$ $(5 + 40) \times 36 \div 2 = 810$	$(1 + 40) \times 40 \div 2 = 820$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $820 - 10 = 810$
錯誤點	$5 + 40 = 45$ $\boxed{40} \div 2 = 20$ $45 \times 20 = 900$	$(5 + 40) \times \boxed{40} \div 2 = 900$	$\boxed{(1 + 40) \times 40 \div 2} = 820$	$40 - 5 = 35$ $(5 + 40) \times \boxed{35} \div 2 = 787.5$

(二) 複式評量試題編製

複式評量的作法是從學生的解法中，各選擇一至二種正確解法和錯誤解法，混合組成一個評量題目，請學生判斷哪一個作法正確，哪一個作法錯誤，並針對錯誤加以修正。此評量方式旨在評量學生判斷正誤及針對錯誤進行修正之能力，雖然難度偏高，但是若能與教學相輔相成，對學生批判能力之提升指日可待，筆者根據 QUASAQR 紙筆認知評量資料，編製數個複式評量試題。茲列舉一二如下：

複式評量題目

E-Board - Microsoft Internet Explorer

oxxooooxxxoooooxxxxx...如此規律排下去
第57個和第58個,各是o還是x?

<p>小華</p> <p>因為奇數是o 偶數是x</p> <p>所以第57個是o 第58個是x</p>	<p>小英</p> <p>我看到1個o,2個x 3個o,4個x.....</p> <p>所以推算第57個是o 第58個是x</p>	<p>小玉</p> <p>$1+2+3+\dots+9+10=55$ $55+11=66$ 第10組是x 第11組是o 所以第57,58個都是o</p>
-------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

請你判斷一下,哪一個是對的?也請找出錯誤的地方,幫忙訂正!

E-Board - Microsoft Internet Explorer

紅球的數量是白球的5倍,紅球比白球多300個,請問紅球,白球各有幾個?

<p>小叮噹</p> <p>$300 \div 5 = 60$ $60 + 300 = 360$</p> <p>A:紅球360個 白球60個</p>	<p>大雄</p> <p>$5 - 1 = 4$ $300 \div 4 = 75$ $75 \times 5 = 375$</p> <p>A:紅球375個 白球75個</p>	<p>元太</p> <p>$5 + 1 = 6$ $300 \div 6 = 50$ $50 + 300 = 350$</p> <p>A:紅球350個 白球50個</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

三、實施 QUASAR 紙筆認知評量的價值

(一) 實施 QUASAR 紙筆認知評量，可以提升學生數學解題與說理的能力

實施 QUASAR 紙筆認知評量，發現學生解題記錄中，有的學生答案正確，計算過程正確，但是不會說理只會描述作法和步驟；也有的學生答案正確，計算過程正確，但是文字說理錯誤。這兩種現象在一般的紙筆評量中，由於答案正確且計算過程正確，因此得到滿分是無庸置疑的，然而在滿分的背後學生的數學能力可能相當薄弱；若是教師能夠實施 QUASAR 紙筆認知評量，將可以及早發現學生的問題，及早導正學生的錯誤概念，進而提昇學生數學解題與說理的能力。

(二) 實施 QUASAR 紙筆認知評量，可以促使教師在課程和教學上作改變

實施 QUASAR 紙筆認知評量，可以促使教師在課程和教學上作改變，因為透過學生數學解題說理能力的質性分析，教師將可以輕易掌握每個學生數學解題說理的能力，也可以清楚的瞭解全班學生數學解題說理層次的分佈情形、全班學生的正確解題類型和錯誤解題類型等，當教師手上擁有充分的學生學習表現資料時，勢必會促使教師在課程和教學上作調整與改變，進而選擇更符合增進學生高層次數學能力的教學策略。

(三) 實施 QUASAR 紙筆認知評量，可以提升編製複式評量和選擇題試題的品質

複式評量的作法是從學生之解題記錄中，各選擇一至二種正確解法和錯誤解法，混合組成一個評量題目，以評量學生判斷正誤及修正錯誤之能力，QUASAR 紙筆認知評量 Level 5, 4, 3 之正確解題資料和 Level 2, 1 之錯誤解答，正是編製複式評量試題的主要依據。此外，編製選擇題最難的地方就在於選項答案數據之設定，而 QUASAR 紙筆認知評量 Level 2 和 1 之錯誤解答，乃編製「誘答」選項之最佳參考，因此，若是教師先實施 QUASAR 紙筆認知評量，再進行複式評量試題和選擇題之編製，將可以提升複式評量試題和選擇題試題之品質。

(四) 實施 QUASAR 紙筆認知評量，可以開啟學生數學解題資料數位典藏的契機

目前關於學生數學迷思概念之文獻頗多，然而學生正確解題說理之文獻資料卻不多見，因此，若是教師能有系統的針對一到六年級的學生實施 QUASAR 紙筆認知評量，然後將學生在各類數學主題中，Level 5, 4 之正確解題說理資料與 Level 1-5 之解題示例萃取，數位典藏起來，那麼將可以開啟學生數學解題說理資料數位典藏的新契機。

從初識 QUASAR 紙筆認知評量方式到 QUASAR 紙筆認知評量方案的規劃與實施，歷時三個多月，雖然歷程有點艱辛、資料整理也相當耗時，但是，學生 Level 5 的精采表現，常常讓我感動不已，學生從 Level 1, 2, 3 進步到 Level 4, 5 的事蹟，則是我努力以赴的動力。本文詳細闡述 QUASAR 紙筆認知評量的規劃、實施及學生的表現，旨在讓有心改變評量方式的中小學教師更加瞭解實施 QUASAR 紙筆認知評量的真貌及價值，作為未來推動 QUASAR 紙筆認知評量的參考。

參考文獻

- Lane, S. & Silver, E.A. (1995.) .Equity and Validity Consideration in the Design and Implementation of Mathematics Performance Assessment : The Experience of the QUASAR Project. In : M. Nettles, & A.L. Nettles (Eds) ,Equity and excellence in educational testing and assessment (pp. 185-219) .Boston : Kluwer
- Ford Foundation (1989) . Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning. Kansas: University of Pittsburgh.