2011年南臺灣教育論壇

國中基測數學解題完全策略之研究

Junior high school basic competence test of mathematics problem solving strategies fully

研 究 者

高雄市英明國中　顏錦偉

連絡作者：顏錦偉、0963-010112、wey0880@gmail.com

發表日期：100年7月25日

國中基測數學解題完全策略之研究

Junior high school basic competence test of mathematics problem solving strategies fully

研究者：高雄市英明國中教師 顏錦偉

摘 要

本文探討運用數學解題策略及進行解題歷程分析，將學者理論應用在數學解題實務研究上，以釐清數學解題的真正意涵及學習效益，採用下列解題策略：1.運用公式；2.畫輔助線；3.製作圖(表)；4.尋找規律；5.動手計算；6.倒推法；7.解題計畫，而在解題歷程上採用教學上常用的分析、探討及檢驗，此與 Schoenfeld 所提的三個步驟相似。而試題取樣為兼顧數學能力與數學內涵，以採用國中基測數學試題為樣本。針對 95 年第 1 次國中基測數學試題解題分析，發現該年數學試題仍以動手計算占多數。「解題有法，解無定法」，解決數學問題並非一成不變，也沒有任何一個解法可以放諸四海而皆準的，期待這樣的解題方法能對國中數學解題教學有所幫助。

話說：「沒有教不會的學生，只有不會教的老師。」提供的這些解題策略，經由 95 年第 1 次國中基測數學試題解題分析，作為現今國中數學課堂上教學參考案例，希望日後能改變目前國中數學老師教學方式，把數學慢慢教，教清楚，給學生充裕的思考時間，經過師生互動討論，讓學生自行建構自己的解題模式與學習方法，學生一點就通，老師是不是上課就變輕鬆多了！

關鍵字：國中基測數學試題、解題策略、解題歷程

國中基測數學解題完全策略之研究

壹、前言

數學教育的任務，是讓學生學習和掌握數學科學。因此，數學教育不能只談教育，不談數學。一個數學教師，必須具備豐富的數學知是，掌握數學技能，更重要的是理解數學的本質，掌握數學思想方法（彭光明，2008)。數學是國中教學的主要學科之一，數學成績好壞可以左右各學科學習的進度與成就，於是，數學教學與學習數學成為現在教師與學生面臨的重要課題。學者張靜譽（2002）對於數學教育改革指出：80 年代有三大趨勢：大眾數學、解題、服務性學科，其中以教學生解題最令人矚目。1980 年，ICME 提出 80 年代中學數學教學行動計劃，認為解題應為 80 年代中學教學的中心，然而，教學生解題是叫好不叫座的議題。許多教學生解題的研究報告顯示，學習效果很有限。

學者翁秉仁（2009）指出：「數學教育學科的昌盛，許多數學家都曾經樂觀其成，畢竟數學教育的研究，應該有助於整體學生數學能力的成長。」「重視生活情境、概念理解、解題（problem solving)、排斥傳統計算程序的練習是這一波數學改革的主要特色。改革者常認為過去的數學教學，過於重視形式程序，以致於忽略數學日常生活應用的重要性，對數學概念又不求甚解，因此無法有效、有策略的解題」。

在每個人學習的歷程中，數學這個科目總是扮演著舉足輕重的角色，不論是時代的進步或是課程的演變，成功解題與否都是數學教育中最關切的問題。民國九十二年公佈的「國民中小學九年一貫課程綱要」中，數學領域的教學總體目標就將「學習應用問題的解題方法」列入其中，可見學習解題的重要性。(楊敦州，2004)

數學解題並不只是單純的將問題的答案解出，而是涉及到一連串的心智活動，因此，如果想要探討學生解數學問題時的困難，應該從學生解題歷程中來進行探究，才能正確地分析學生解題時所產生的錯誤原因（吳勇賜，2007)。於此，本文探討運用數學解題策略及進行解題歷程分析，將學者理論應用在數學解題實務研究上，以釐清數學解題的真正意涵及學習效益，作為現場教師教學參考。本文研究目的有：

一、分析與比較有關數學解題相關研究文獻與理論。

二、自行發展數學解題策略，進行國中基測數學試題分析。

三、提出使用解題策略教學的有關建議。

本文提到的「數學解題」、「策略」、「解題策略」與「解題歷程」等專有名詞，其操作性定義如下：

一、 數學解題（Mathematical problem solving）

數學解題係指結合新、舊經驗與運用數學概念、原理或方法在解決數學問題上。

二、 策略（Strategy）

策略係指為完成某項任務或達到某種目標所擬定的行動方案。

三、 解題策略（Problem-solving strategies）

解題策略係指有系統、計畫性的解決數學問題所使用的方法，包含數學解題與策略規劃。

四、 解題歷程（Solution analysis）

解題歷程係指將解題策略應用到數學解題，找出合理、有效正確答案的一系列過程，解題歷程也可以是解題過程的呈現。

貳、文獻探討

在學校中，教師如何進行「解題策略」教學，指導學生獲得正確解題的重要方法，以增進學生學習能力，已為世界各國推動數學教育的重點。以下整理出有關數學解題策略及解題歷程的相關研究與理論：

一、有關解題策略部分

(一) Sobel 的數學解題策略

美國 Max A. Sobel 教授（1975）在”Teaching Mathematics：Aids, Activities, and Strategies”一書中指出：「教師上課生動活潑，及能引發學生學習興趣，必須強化學生的解題技能」，所以，提出「啟發式的解題策略」來達成有效教學，這七個解題策略是：

1. 嘗試錯誤（Trial and Error）

   在嘗試錯誤過程中伴隨著邏輯思考很可能是某類問題的最佳說法。

2. 善用教具或畫圖（Use an Aid, Model, or Sketch）

   畫一簡圖、摺一紙片、剪一截細線或利用就在手邊的教具，有效解決問題。

3. 尋找規律（Search for a Pattern）

   尋找規律並一般化是威力十足的解題策略。

4. 動手操作（Act It Out）

   動手做使被動成為主動，有助於了解問題之真諦，通常代數中關於時間、比率和距離之類的問題都採這一策略。

5. 製作圖表（Make a List、Table or Chart）

   多數問題或多或少都需要繪製圖表，在製作圖表過程中常常能激發學生的想像力並產生興趣，而引發學習動機。

(二) Oracle 的數學解題策略

Oracle 教育基金會(Oracle Education Foundation)指出：「正確地解決問題能提高學生在數學上的表現」，舉出七項解題策略：（引自 Oracle 教育基金會）

1. 作圖表（Make a table）

2. 列表（Make an organised list）

3. 找規律（Look for a pattern）

4. 猜測（Guess and check）

5. 畫圖（Draw a picture or graph）

6. 倒推法（Work backwards）

7. 解一個簡單問題（Solve a simpler problem）

（三）YLL 討論網的數學解題原理

網路上「YLL 討論網」（2004）提出國中數學解題 7 大原理，敘述如下：（引自 YLL 討論網）

1. 代入法：

（1）一個式子每一個實數 x 均成立，我們用特別數值代入其中亦成立（代值法又稱數值代入法）。

（2）學習公式、定義、應用它時，依題目之數字代入(代入法)。

（3）把一個成立的式子代入另一式子可消去變數或簡化問題(兼有消去的功用)。

（4）用未定係數法求各種圖形方程式時，把已知數代入，以列出未定數之方程式解之。

2. 配套法：

題目需要什麼我們就配什麼！

3. 變形法：

（1） 繁雜的代數問題，如用置換法加以變形，常可式子變簡單，方程式變得容易解。

（2） 比例式，設未知數加以變形，有時利用合分比變形。

4. 轉化法：

（1） 代數題目，如轉化為幾何之後畫出圖形，可立即得到問題的答案。

（2） 幾何題目，不好處理時，轉換為代數方法，利用①解方程式②判別式③二次方程式根與係數④代數之不等式…等可嚴密地解出題目。

（3） 將生活上的問題轉化成圖形，再轉化成方程式或不等式。

5. 歸納法：

（1） 數學歸納法是把歸納法原理應用於證明，若將歸納法原理加以推廣應用於定義稱為遞迴定義法。

（2） 數學中之各單元在問題之規則未明時，常常由基本的情形中去找尋規則這是數學之精神所在。

6. 比較法：

（1）比較法經常用於多項式求係數或列方程式。

（2）比較法也可用於幾何圖形的等價關係。

7. 逼近法：

將符合題意的數一個一個代入式子求得符合題意的答案。

二、有關解題歷程部分

(一) Polya 的解題歷程

Polya 將解題歷程分成四個步驟：1. 了解問題；2. 擬定計畫；3. 執行計畫；4. 回顧解答；同時也在四個階段中分別提出幫助解題的一些啟發推理，如表 1。(引自張憶壽，1986)

表 1　Polya 的解題歷程與解題策略

第一步	了解問題
必須了解問題	未知數是什麼？已知數據是什麼？條件是什麼？ 可能滿足條件的各個部份嗎？條件足夠決定未知數嗎？不夠嗎？過多嗎？矛盾嗎？ 作一個圖，導入適當的計劃。 分開條件的各部份。你能把它們分別寫下來嗎？
第二步	擬定計畫
找出未知數和已知數之間的關係，如果找不到就只得考慮一些輔助問題，想辦法擬定一個解題的計劃。	你以前見過它嗎？或見過形式稍有不同的相似問題嗎？ 你知道什麼相關的問題嗎？你知道什麼可能有用的定理嗎？ 注視未知數，嘗試思考一個具有相同或相似未知數的熟問題。 這裡有一個相關的以前你解過的問題你能應用它嗎你是否該導入些輔助元素以便應用 你能改述這問題嗎？你能將它改述的更不同些嗎？ 你若解不出這個問題，就先解個相關問題。 你能想出一個更相關的問題嗎？一個更一般的問題？一個更特殊的問題嗎？一個類似的問題嗎？ 你能解決問題的一部份嗎？保留一部份條件，丟開其餘部份；這樣決定的未知數會為何？你能從已知數得出什麼有用的東西來嗎？ 有沒有其他已知的東西可以用來決定未知數？你能改變未知數或已知數，必要時兩者同時改變，使新未知數和新已知數能夠更互相接近嗎？ 你用了所有已知數嗎？你用了全部條件嗎？問題中所包含的重要觀念都已考慮到了嗎？
第三步 實現計畫	實行你的計畫，校核每一步驟。你能否弄清楚的看出哪些步驟是正確的嗎？你能證明它是正確的嗎？
第四步驟	驗證答案，你能否重新檢驗這論證？你能否用別的方法導此結

回顧解答	果？你是否能一下子看出結果？

（二）Schoenfeld 的解題歷程

Schoenfeld（1980）提出在解數學問題時常用的解題策略，有分析、探討及檢驗解答，如表 2。（引自羅汝惠，1993）

表 2　Schoenfeld 之常用解題策略

分析

1. 儘可能的畫圖。

2. 檢查特例

（1）取特殊值代入問題，以獲得較具體的了解。

（2）檢查極端狀況，以探討可能範圍。

（3）令問題中整數取 1、2、3、4 與 5 等小的整數值，是否可歸納出一些規律。

3. 嘗試簡化問題

（1）利用對稱性。

（2）採取”不妨假定…”而不失問題的一般性討論方式。

探討

1. 考慮基本上一樣的問題

（1）用等價的條件取代問題中的條件。

（2）以不同的方式重組問題中的資料。

（3）引入輔助的元素。

（4）用下列重述問題：

a. 改變題目的背景或符號。

b. 考慮歸謬法或倒置法。

c. 假定你已有解答由此導出解答的性質。

2. 考慮稍微修改的問題

（1）選擇子目標（想辦法得到部份結果或滿足部份條件解答）。

（2）放寬問題中的某一條件，然後在將之重新收緊。

（3）把問題分解成不同狀況的情形，再對每類狀況逐一解答。

3. 考慮大幅修改的問題

（1）以較少的變數建構類似題。

（2）改變一個變項，決定該變項的影響。

（3）想辦法利用有相似①形式，②已知條件，或③結論的相關題目結果或其解法。

檢驗解答

1. 你的解答能通過下列的特殊檢定嗎？

（1）你是否用到了問題中所有相關的資料？

（2）結果是否合乎合理的估計或預測？

（3）利用對稱，維度分析與比例等原則來檢查時，你的結果是否站的住腳？

2. 你的解答能通過下列的一般檢定嗎？

（1）這樣的答案可以用不同方式得到嗎？

(2)這個抽象的答案能放在特別的狀況，變得更具體些嗎？
(3)這個解答能否簡化成已知的結果嗎？
(4)我們能由此解答推出一些已知的結果嗎？

（三）John Mason 等的解題過程

John Mason 等人（1982）指出：數學解題過程包含三個階段，進入、攻擊與回顧。

1. 進入階段：建立在三個問題上

(1)我的已知是什麼？

(2)我的所求是什麼？

(3)我能引入些什麼？

2. 攻擊階段：建立在三個過程上

(1)猜想：明白的表達猜想；檢查猜想；推翻猜想；運用你的辨別力。

(2)證明：結構；尋找結構的連結；猜想被證明。

(3)說服：做自己的敵人。

3. 回顧階段：有三項工作必須要做

(1)檢查解答。

(2)反思關鍵的想法與關鍵的時刻。

(3)推廣到更一般的情況。

（四）Lester 的數學解題歷程

Lester(1980)以六階段來描述數學解題，並強調這六個階段相互的關係，如下所述。(引自蔡啟禎，2004)

1. 察覺問題(problem awareness)：解題者對所面臨的情境，能覺察到是一個問題，並且有意願解決問題。

2. 理解問題(problem comprehension)：這個階段包含兩個子階段：

(1)轉譯(translation)：解題者將問題提供的訊息譯成自己可以理解的語句。

(2)內化(internalization)：解題者選取相關的訊息，並判斷其相關的程度。

3. 目標分析(goal analysis)：將問題變形以便應用熟悉的策略與技巧。解題者將訊息歸類，並作成細目，而且認清問題的結構，以便更進一步了解問題的成分，是否符合以下條件：

(1)任何子目標可以幫助達成目標嗎？

(2)這些目標有一定的次序嗎？

(3)這樣的次序編排恰當嗎？

(4)能正確認清運算條件嗎？

4. 計畫發展(plan development)：解題者擬定一個可行計畫、清楚可行的策略，將子目標編列程序和詳細運算。解題者要能了解解題進行的程序和方法，並注意下列事項：

(1)是否有其他的方法可以解這個題目？

(2)是否有更好的方法？

(3)曾經解過這個問題嗎？

(4)這樣的計畫能達成目標或子目標嗎？

5. 計畫執行(plan implementation)：解題者執行擬定的計畫，並且注意下列事項：

(1)使用這個策略正確嗎？

(2)計畫的步驟順序正確嗎？是否能使用不同的順序？

6. 程序和解答評估(procedures and solution evaluation)：此階段不僅要檢查答案是否有意義，而且從目標分析到發現解答的整個程序，皆屬評估範圍。

參、解題策略實務分析

綜合以上各種解題策略，本文將採用下列解題策略：1.運用公式；2.畫輔助線；3.製作圖(表)；4.尋找規律；5.動手計算；6.倒推法；7.解題計畫，在解題歷程上採用教學上常用的分析、探討及檢驗，此與 Schoenfeld 所提的三個步驟相似。而試題取樣為兼顧數學能力與數學內涵，以採用國中基測數學試題為樣本。

一、 95 年國中第 1 次基測數學試題解題分析

(一)運用公式

國中數學常用的定義、公式、定理或性質，必須弄清楚，把它背下來，才能知道題目要算什麼，通常這類的題目比較簡單，往往是送分題。例如：

第 4 題　　正確選項：D

今有一粒均勻骰子，已知守守第一次丟出 1 點，第二次也丟出 1 點。若第三次丟出 1 點、3 點、5 點的機率分別為 a、b、c，則 a、b、c 的大小關係為何？

(A) $a>b>c$　(B) $a<b=c$　(C) $a<b<c$　(D) $a=b=c$

【分析】知道機率的意義，並能比較 a、b、c 三個數字的大小。

【探討】一粒均勻骰子有 6 個面，不論每一次出現點數為何，機率都是$\frac{1}{6}$。

【檢驗】$\because a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{1}{6}$，$c=\frac{1}{6}$，故 $a=b=c$ 。

第 9 題　　正確選項：D

下列哪一個式子是錯誤的？

(A) $\frac{2}{25}+\frac{3}{35}+\frac{4}{45}=\frac{3}{35}+\frac{2}{25}+\frac{4}{45}$　(B) $\frac{2}{25}-\frac{3}{35}-\frac{4}{45}=\frac{2}{25}-\frac{4}{45}-\frac{3}{35}$

(C) $\frac{2}{25}\times\frac{3}{35}\times\frac{4}{45}=\frac{4}{45}\times\frac{3}{35}\times\frac{2}{25}$　(D) $\frac{2}{25}\div\frac{3}{35}\div\frac{4}{45}=\frac{3}{35}\div\frac{2}{25}\div\frac{4}{45}$

【分析】選項分別是加、減、乘、除計算，沒有括號，只要找出兩邊等式不相等。

【探討】數的運算規則有結合律、分配律及交換律三種，由以上題目知道：分數做了交換位置，應使用交換律；加法與乘法具有交換律，(A)和(C)正確。而(B)中的分數是大數減小數，也正確。

【檢驗】$\frac{2}{25}\div\frac{3}{35}\div\frac{4}{45}=\frac{3}{35}\div\frac{2}{25}\div\frac{4}{45}$中，$\frac{2}{25}$與$\frac{3}{35}$交換位置，除法不具有交換律，故兩邊等式不相等。

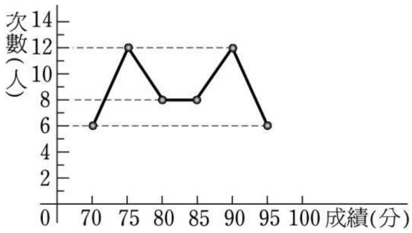
（二）畫輔助線

善用輔助線，能讓圖形簡單化、易懂，再利用所學的數學定理達到解題的目的。

第 11 題　正確選項：C

附圖是小克班上同學工藝成績折線圖。根據圖中的數據，判斷該班平均工藝成績為幾分？

(A) 75　(B) 77.5　(C) 82.5　(D) 90

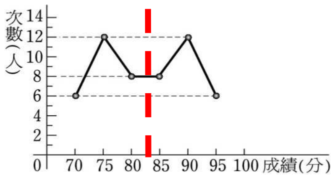


【分析】本圖 70-80 分與 85-95 分呈線對稱。

【探討】畫出對稱軸（如圖）

對稱軸正好落在 80-85 分的中央位置

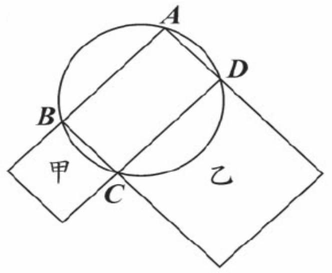
【檢驗】80-85 分的中央處就是 82.5 分。



第 22 題　正確選項：D

如圖，有一圓及長方形 ABCD，其中 A、B、C、D 四點皆在圓上且 $\overline{BC}<\overline{CD}$。今分別以 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為邊長作甲、乙兩正方形。若圓半徑為 1.5 公分，則甲、乙面積和為多少平方公分？

(A) 4.5　(B) 6　(C) 7.5　(D) 9



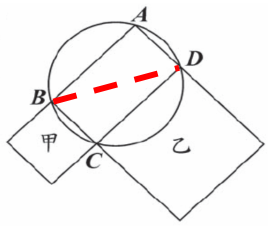
【分析】觀察甲、乙面積是正方形，正方形面積公式為邊長之平方。

【探討】連接 $\overline{BD}$（如圖）　$\because \angle A=\angle BCD=90^\circ$

$\therefore \overline{BD}$ 為圓 O 之直徑 $=1.5\times2=3$（公分）

甲面積 $=\overline{BC}^2$　乙面積 $=\overline{CD}^2$

【檢驗】甲＋乙 $=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2=3^2=9$(平方公分)



（三）製作圖(表)

適度運用畫圖表的方式，能清楚表示題目中數量關係，從圖表裡看到數量變化的全貌，增加答題的正確度。

第 6 題　正確選項：D

有甲、乙、丙、丁、戊五塊三角形紙板，已知各紙板其中的兩內角分別為甲：55°、80°，乙：55°、45°，丙：45°、80°，丁：55°、65°，戊：45°、55°。在甲、乙、丙、丁四塊紙板中，哪一塊與戊不相似？

(A) 甲　(B) 乙　(C) 丙　(D) 丁

【分析】共五塊三角形，且數字很亂，可以好好處理成一個表格。

【探討】依序放入 3 個內角，如下表

甲	55°	80°	**45°**
乙	55°	45°	**80°**
丙	45°	80°	**55°**
丁	55°	65°	**60°**
戊	**45°**	**55°**	**80°**

哪一塊與戊不相似，就是內角只要有一個與戊不相等就是不相似。

【檢驗】從圖表中找到丁的內角有一個是 65°，與戊不相等。

第 16 題　　正確選項：C

在坐標平面上，直線 L 的方程式為 $y=-3x+a$。若 $a>0$，則 L 不通過第幾象限？

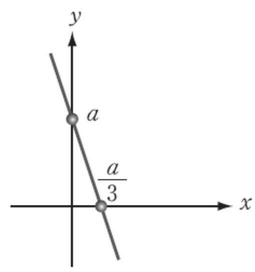
(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

【分析】直線方程式的圖形為一直線，以兩點坐標畫出圖形找答案。

【探討】令 $x=0$，$y=a$； $y=0$，$x=\dfrac{a}{3}$；

x	0	$\frac{a}{3}$
y	a	0

$\because a>0$　$\therefore$ 圖形如圖



【檢驗】此一直線並未通過第三象限。

(四) 尋找規律

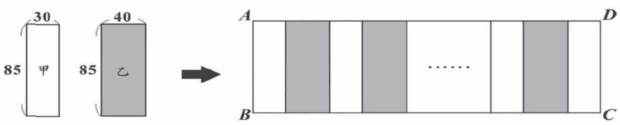
題目中，幾個變數之間存著數量樣式關係，試著先找最基本的「型」，然後逐一去推出這個「型」的關係，最後能發現全部的數量樣式關係都可以依照這個「型」推出。

第 27 題　　正確選項：B

有甲、乙兩種長方形紙板各若干張，其中甲的長為 85 公分，寬為 30 公分；乙的長為 85 公分，寬為 40 公分，如下圖所示。今依同種紙板不相鄰的規則，將所有紙板由左至右緊密排成右圖的長方形 ABCD，則下列哪一個選項可能是 $\overline{AD}$ 的長度？

(A) 770 公分　(B) 800 公分

(C) 810 公分　(D) 980 公分



【分析】甲、乙長方形紙板的長都一樣，且緊密連接，本題只考慮寬的排列，形成等差數列，知道首項、公差為何，就可以推理出 $\overline{AD}$ 的長度。

【探討】$\overline{AD}$ 的長度依序為 <u>30</u>、70、<u>100</u>、140、<u>170</u>、210、<u>240</u>、⋯

從以上數列觀察可得，以 30 為首項，公差為 70 (奇數項)，

使用公式　和＝首項＋（項數－1）×公差 **【檢驗】**將首項＝30，公差＝70，代入和的公式 30＋（11-1）×70＝730　；　30＋（12-1）×70＝800； 30＋（13-1）×70＝870　；　30＋（14-1）×70＝840。 得知　800 是正確選項

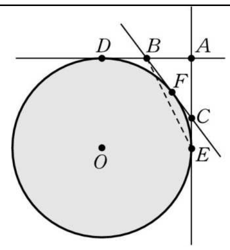
（五）動手計算

依題意，假設未知數與列出算式，逐步計算出答案，或是根據題意列出已知條件，採取計算方法算答案，通常代數題或簡單幾何題都須用到計算。

第 21 題　　　　　　　　　　　　正確選項：C

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$。若三直線 AB、AC、BC 分別與圓 O 切於 D、E、F 三點，則 $\overline{BE}=$？

(A) 6　(B) $\dfrac{25}{3}$　(C) $\sqrt{45}$　(D) $\sqrt{72}$



【分析】已知三直線 AD、AE、BC 為圓 O 的切線，必須知道切線長相等的性質。

【探討】∵三直線 AD、AE、BC 為圓 O 的切線

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CF}=\overline{CE}$　；

$\overline{AD}+\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{AC}+\overline{CF}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}$

$=3+4+5=12$

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{AE}=\dfrac{12}{2}=6$

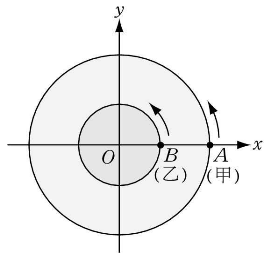
在 $\triangle ABC$ 中，∵ $3^2+4^2=5^2$ 推得 $\angle A=90°$

【檢驗】在直角 $\triangle ABE$ 中，$\overline{BE}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

第 25 題　　　　　　　　　　　　正確選項：C

如圖，A、B 兩點在 x 軸上。今甲、乙兩車分別從 A、B 兩點同時出發，以逆時針方向分別繞著大、小圓周行駛。若甲車每 35 分鐘繞一圈，乙車每 20 分鐘繞一圈，則當乙車剛好繞完第三圈時，甲車位於第幾象限？

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四



【分析】已知甲、乙兩車的速度，及乙車繞完第三圈共花掉 20×3＝60（分）。雖然甲、乙兩車速度不一樣，但是乙車繞完的時間與甲車所花的時間是一樣的。所以，只要計算甲車 60 分鐘所走的距離即可。

【探討】60-35＝25（甲車先走一圈）　$\dfrac{25}{35}\times 4=2\dfrac{6}{7}<3$

【檢驗】甲車 60 分鐘走到第三象限

（六）倒推法

題目簡單適用，例如求根、求解的數目，將選項裏的答案一個一個代入題目，選擇最合適的答案。

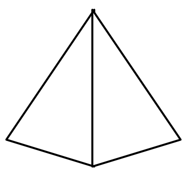
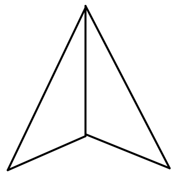
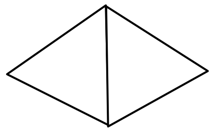
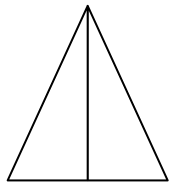
第 5 題　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　正確選項：D

若使用兩塊全等的三角形紙板可緊密拼出一個大三角形，則原來的小紙板必須是何種圖形？

(A) 等腰三角形　(B) 鈍角三角形　(C) 銳角三角形　(D) 直角三角形

【分析】兩塊全等的三角形紙板去拼出一個大三角形，可以從選項的提示中，逐一畫出大三角形。

【探討】依照選項提示的三角形，畫出來並倆倆緊密相接

(A)等腰三角形	(B)鈍角三角形	(C)銳角三角形	(D)直角三角形
			

【檢驗】從以上作圖中，得到兩個全等的直角三角形可以拼出一個大三角形。

第 24 題　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　正確選項：B

甲、乙兩店賣豆漿，每杯售價均相同。已知：

甲店的促銷方式是：每買 2 杯，第 1 杯原價，第 2 杯半價。

乙店的促銷方式是：每買 3 杯，第 1、2 杯原價，第 3 杯免費。

例如，分別在甲、乙兩店購買豆漿 5 杯，均需 4 杯的價錢。若東東想買豆漿 24 杯，則下列哪一個方式花的錢最少？

(A) 在甲店買 24 杯　　　　　　　(B) 在乙店買 24 杯

(C) 在甲店買 2 杯，在乙店買 12 杯　(D) 在甲店買 6 杯，在乙店買 18 杯

【分析】已知甲、乙兩店賣豆漿，每杯售價均相同，接下來將東東買豆漿 24 杯的條件，分別依照甲、乙兩店的促銷方式計算，何者所需的杯數最少，因為杯數少，花的錢也最少。

【探討】(A) $24 \div 2 = 12$　$\therefore 12 + \frac{1}{2} \times 12 = 18$(杯)

(B) $24 \div 3 = 8$　$\therefore 24 - 8 = 16$(杯)

(C) $12 \div 2 = 6$，$12 \div 3 = 4$　$\therefore 6 + \frac{1}{2} \times 6 + (12 - 4) = 17$（杯）

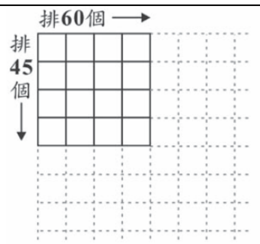
(D) $6 \div 2 = 3$，$18 \div 3 = 6$　$\therefore 3 + \frac{1}{2} \times 3 + (18 - 6) = 16.5$（杯）

【檢驗】由以上的計算中，得到(B) 所需的杯數最少，所以，花的錢也最少。

（七）解題計畫

題目一下子不清楚題意，或者眼前所知道的條件很少，要在短時間內找出答案很不可能，這時，頭腦必須冷靜下來，逐一檢視題目告訴我們的條件是什麼（找出關鍵點），根據所學的數學概念、方法，列出解題步驟，經過計算以求出答案。

第 29 題　　　　　　　　　　　　　　　正確選項：C



如附圖，若將 2700 個大小相同的小正方形緊密地排出一個長邊有 60 個小正方形、短邊有 45 個小正方形的長方形後，在此長方形中畫一條對角線，則此線通過幾個小正方形？

(A) 60　(B) 75　(C) 90　(D) 105

【分析】此題學生沒看過，絕對拿不到分數。因為看到長邊 60 個，短邊 45 個，就會想動手來畫一畫，畫到最後，學生會舉手問：「老師，紙張不夠我畫」。這種動手畫一畫又得不出答案的題目，想必學生會放棄。

【探討】為解決這一題目必須以第 28 題為基礎，分成兩種情形討論，最好實際畫圖看看，從畫圖中慢慢去找出長邊與短邊變化時，通過格子數也隨著變化，藉此觀察兩者間的數值變化規則。建議採用數學歸納法來做

1×1、1×2、…、1×n

2×1、2×2、…、2×n

……………………

m×1、m×2、…、m×n

1. 長短邊的數值不互質

長邊、短邊	2、2	2、4	2、6	3、3	3、6	4、8	4、6
通過格數	2	4	6	3	6	8	8

結論：長邊數+短邊數−公因數=通過格數

2. 長短邊的數值互質

長邊、短邊	2、1	2、3	2、5	3、1	3、2	3、4	4、5
通過格數	2	4	6	3	4	6	8

結論：長邊數+短邊數−1=通過格數

【檢驗】本題長邊有 60 個、短邊有 45 個，(65,45)=15 是不互質

所以，60+45−15=90 ，答案就是這樣算出來，懂了沒！

二、 95 年第 1 次國中基測數學試題分類

本文所列七種解題策略，經過分類整理如表 3：

表 3　基測數學試題分類

解題策略	題　號	題數	百分比
1. 運用公式	（2）、4、（8）、9、（16）、19、28、30、31	6	18%
2. 畫輔助線	7、10、11、15、22、23、（33）	6	18%
3. 製作圖(表)	（4）、（5）、6、16、26	3	9%
4. 尋找規律	27、（29）	1	3%
5. 動手計算	1、2、3、（6）、（7）、8、（10）、（11）、12、13、14、（15）、17、18、20、21、（22）、24、25、（26）、（27）、33	14	43%
6. 倒推法	5、（12）、（13）、（14）、（19）	1	3%

7.解題計畫	(13)、(20)、(24)、29、32	2	6%

由表 3 的分類整理，知道 95 年第 1 次國中基測數學試題仍以動手計算題型占多數。( )表示本題可以一題多解，並非限定一種特定解法，此與 Oracle 教育基金會在解題策略裡所講的重點：「Different strategies can be used to solve the same problem」是一致的。

肆、分享與建議

教學是一門藝術，教師是教學的主角，成功的教學者可以達成有效教學，成功的解題者可以增進學習成效。「解題有法，解無定法」，解決數學問題並非一成不變，也沒有任何一個解法可以放諸四海而皆準的。針對 95 年第 1 次國中基測數學試題進行解題分析，採用適宜解題策略，透過解題歷程，瞭解學生先備知識及教師應採用何種教學方法，以獲得最佳答案，期待這樣的解題方法能對國中數學解題教學有所幫助。本文的研究發現，有：

一、解題策略一體適用

本文使用的七種解題策略，有「運用公式」、「畫輔助線」、「製作圖(表) 」、「尋找規律」、「動手計算」、「倒推法」及「解題計畫」等七種，於表 3 中，發現 33 個題目都至少能找到一種解題策略進行解題。

二、動手計算題型居多

九年一貫課程強調培養學生帶著走的能力，而數學教學最能表現出「帶著走的能力」就是「計算能力」，此與表 3 中的分析吻合，33 個題目中，「動手計算」占 43%，說明教師教學仍以計算題型為教學重點。

三、一題多解

解無定法，正好說明「一題多解」，解題策略彼此存有包含關係，視解題者優先採取何者策略而定。於表 3 知道，33 個題目裡有 22 個題目可以使用兩種不同解題策略，靈活運用解題策略，活化學生解題思維與技巧，增進學生解題正確性，進而提升數學學習興趣。

經過文獻與理論探討及實務分析之後，提出「研究對象」、「研究方法」與「研究內容」的建議，如下敘述：

一、研究對象

教學重在概念澄清，使學生充分瞭解學習數學內涵，解題策略及分析不能是教學的全部，應以培養學生基本數學素養為主，再依學生舊經驗與教學進度（或段落）適度使用為佳，因此國三階段的學生，就學習基礎、邏輯思考與總結測驗是恰當時機。

二、研究方法

本文僅限於文獻及理論的探討，釐清及使用數學解題策略及分析原理，以應用到國中基測數學試題實務分析上，沒有用到特定的教育研究方法，若欲瞭解學生解題歷程表

現及對學生學習效益進步多少，則應採取適當的研究方法。

三、研究內容

文中以 95 年第 1 次國中基測數學試題為分析內容，並未擴及其他年度基測及其他考試題目上，所以，研究發現僅作本研究解釋之用，但文中所提出的解題策略及解題歷程仍可應用到其他試題上。

話說:「沒有教不會的學生，只有不會教的老師。」現在，提供的這些解題策略，經由 95 年第 1 次國中基測數學試題解題歷程表現，作為現今國中數學課堂上教學參考案例，希望日後能改變目前國中數學老師教學方式，把數學慢慢教，教清楚，給學生充裕的思考時間，經過師生互動討論，讓學生自行建構自己的解題模式與學習方法，學生一點就通，老師是不是上課就變輕鬆多了！

參考文獻

張憶壽譯，(G.Polya)著 (1986)。**怎樣解題**(再版)。台北：眾文圖書股份有限公司。

張靜嚳。(2002)。**數學教育改革小史**。發表於「九年一貫數學如何教？實例研討會」，彰化師大科教所‧

彭光明 (2008)。**數學思想方法的教學**。北京：北京大學出版社。

楊敦州 (2004)。**型態化數學解題與表徵能力之初探-以國中數學為例**。國立高雄師範大學視覺設計學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。

蔡啟禎 (2004)。**國小中年級資優生數學解題歷程分析**。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。

羅汝惠 (1993)。**台灣南區國中一年級及數學科解題導向教學法與傳統教學法之教學成效比較研究**。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。

吳勇賜 (2007)。**數學解題的研究**。新北市福營國中。2011 年 2 月 28 日取自網址：http://teacher.fyjh.tpc.edu.tw/~academic/blog/archives/001669.html。

翁秉仁 (2009)。**數學教育改革的商榷**。國立臺灣大學數學系系友專區。2011 年 2 月 28 日取自網址：http://www.math.ntu.edu.tw/ALUMNI/ainteractive/。

John Mason, Leone Burton and Kaye Stacey (1982)。**數學思考** (臺北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯)。台北：九章出版社。

Max A. Sobel and Maletsky, Evan M. Maletsky (1975)。**數學教學方法** (張靜嚳、念家興譯)。台北：九章出版社。

Oracle 教育基金會。Projects by Students for Students。2011 年 3 月 2 日取自網址：http://library.thinkquest.org/25459/learning/problem/。

YLL 討論網。**國中數學問題**。2011 年 3 月 2 日取自網址：http://www.yll.url.tw/viewforum.php?f=64。