

麻煩的倍數不麻煩

《改良式面積模式分數乘法教學》

高雄市二苓國小 李秀芳 高雄市翠屏國小 魏美娟

壹、前言

九年一貫課程綱要明確指出在傳統數學教學上，常把觀念與演算截然二分。數學運算或計算，並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算，係指能夠在生活情境中理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作，這種能透過理解並能將觀念與計算結合的能力才是演算能力。分數的乘法是五、六年級數學課程中的一個重要項目，學生在熟練了整數倍數的概念後，對於分數倍數概念的建立往往還是有困難，為了避免學生只學會分數乘法就是一分母

相乘、分子相乘的機械式計算操作（即 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ ），教師會利用圖形表徵

輔助說明（例如線段圖形表徵、面積模形表徵），其中面積模式是在分數乘法教學中常見的圖形表徵，此教學最主要植基於學生在三年級已經學習過的「長方形面積計算原理」（即長 \times 寬=長方形面積）、「整體量『1』」、「要求得單位量須等分整體量」以及「單位量的累加概念」等概念，也就是學生能夠知道將某一固定面積（例如一張紙）分成 a 份，每一份即為 $\frac{1}{a}$ 張，再從其中取 b 個 $\frac{1}{a}$ 即為 $\frac{b}{a}$ ，

取得的部份面積即為 $\frac{b}{a}$ 張。本教學設計乃利用此一理念，將分數乘法分成三部份：

- （一）真分數乘法（分成：整數 \times 真分數、單位分數 \times 單位分數、真分數 \times 真分數）
- （二）帶分數乘法（分成：帶分數 \times 真分數、真分數 \times 帶分數、帶分數 \times 帶分數）
- （三）假分數乘法（分成：假分數 \times 真分數、真分數 \times 假分數、假分數 \times 假分數）

在利用面積模型引導出真分數的乘法算則（ $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ ）後，為了避免

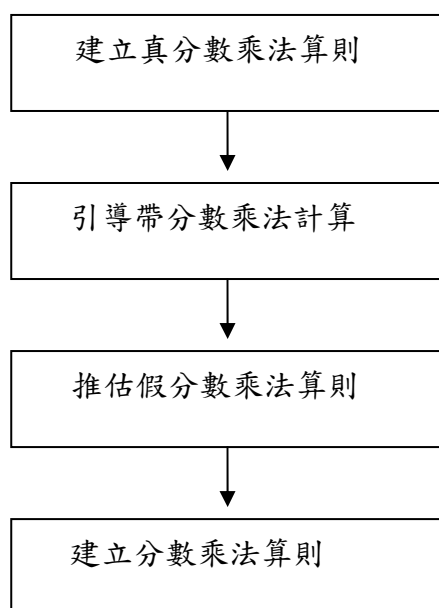
在運用面積模式進行假分數乘法而產生整體「1」被分割兩次後總數的混淆情形，因此安排先以帶分數乘法切入，引導學生利用面積模型觀察帶分數的「分數部分」被分割兩次後所得到的總份數，來鞏固整體「1」的概念，然後再觀察整數部分是否每一個「1」都要切成相同份數（找到相同單位分數），才能把每一個部份相加起來得到答案。在完成帶分數乘法的理解與演算部份之後，再引導學生推估假分數的乘法算則：即「假設真分數乘法算則也能適用於假分數乘法運算」，此時驗證的方法就是將第二部份帶分數的乘法算式中的帶分數部份都換成假分數，再套以真分數乘法算則，檢驗答案的正確性，當確立「真分數乘法算則也能

適用於假分數乘法運算」時，此時分數乘法的算則才完成確立，即 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ 。

本教學活動教學流程有別於一般的分數教學活動（將帶分數乘法部份移至假分數乘法之前），即在於避免進行假分數乘法時，以面積模式呈現容易形成整體「1」模糊掉的缺陷；另外藉由等分割活動的操作，不但可讓學生加深學習印象，更可建立正確的分數乘法概念；除此之外結合「大膽假設、小心求證」的科學驗證精神，建立分數乘法運算通則，更是本教學活動的一大特色。希望透過此深入淺出且結合操作活動的分數乘法教學，能夠協助學生對抽象的分數倍數的學習更

順利，相信學生在透過充分理解之後，麻煩的倍數也能變得不麻煩了！

貳、分數乘法教學設計架構



一、教學目標：

- (一) 學生能從面積模型之圖形表徵中歸納出真分數乘以真分數的分數的乘法算則。
- (二) 學生能運用真分數的分數乘法算則，從面積模型之圖形表徵中，將帶分數分成整數與分數部份進行運算，解決帶分數乘法問題。
- (三) 學生能運用帶分數的佈題，將帶分數部份轉換成假分數並進行假設「真分數乘法算則也能適用在假分數乘法」，將假分數演算結果與帶分數演算結果進行比對驗證，得到假分數的乘法算則。
- (四) 歸納、確立 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ 之分數乘法算則。

二、教學安排：

本教學活動的實施可做如下之安排：

- (一) 複習單位分數的概念。
- (二) 以面積模型引導學生解決真分數乘法(整數×真分數、單位分數×單位分數、真分數×真分數)的問題。
- (三) 利用面積模型引導學生解決帶分數乘法(帶分數×真分數、帶分數×真分數、帶分數×帶分數)的問題。
- (四) 以真分數乘法算則推估假分數乘法(假分數×真分數、真分數×假分數、假分數×假分數)算則
- (五) 綜合以上活動引導學生歸納出分數乘法算則。

三、教學對象：國小六年級學生。

四、教學時間：2 節課 80 分鐘。

五、評量與回饋：20 分鐘。

參、教學活動

活動內容說明

◎複習舊經驗

1. 教師提問：分數 $\frac{1}{4}$ 是什麼意思？（把 1 塊大餅平分成四份，其中的一份是 $\frac{1}{4}$ 。）

2. 教師提問：還記得什麼是單位分數嗎？（分子是 1 的分數，稱為單位分數。例如： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{18}$ ……）

3. 教師提問：那真分數 $\frac{3}{5}$ 是由幾個 $\frac{1}{5}$ 組成的？（3 個）

教師提問：如果要用算式表達 $\frac{3}{5}$ 是由 3 個 $\frac{1}{5}$ 組成的。該怎麼寫？

學生回答： $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times 3$ ，也就是說 $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{1 \times 3}{5} = \frac{3}{5}$

4. 教師提問：帶分數 $1\frac{4}{7}$ 的單位分數是什麼？（ $\frac{1}{7}$ ）

教師提問：1 是由幾個 $\frac{1}{7}$ 組成的？（7 個）

教師提問： $\frac{4}{7}$ 是由幾個 $\frac{1}{7}$ 組成的？（4 個）

教師提問：所以 $1\frac{4}{7}$ 是由幾個 $\frac{1}{7}$ 組成的？（11 個）

教師提問：如果要用算式表達 $1\frac{4}{7}$ 是由 11 個 $\frac{1}{7}$ 組成的。該怎麼寫？

$(1\frac{4}{7} = \frac{1}{7} \times 11, \text{ 也就是 } 1\frac{4}{7} = \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}, \text{ 所以 } \frac{1}{7} \times 11 = \frac{11}{7})$

◎發展活動

活動一：真分數乘法

(一) 整數×真分數

佈題：7塊巧克力的 $\frac{2}{3}$ 是幾塊？

1. 教師提問：一塊巧克力的7倍是幾塊？（7塊）

教師提問：一塊巧克力的 $\frac{2}{3}$ 是幾塊？（ $\frac{2}{3}$ 塊）

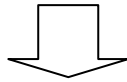
教師提問：7塊巧克力的 $\frac{2}{3}$ 是幾塊？（ $7 \times \frac{2}{3}$ ）

2. 把問題用算式填充題記下來。 $7 \times \frac{2}{3} = (\quad)$

3. 利用作圖畫出7塊巧克力的 $\frac{2}{3}$

（教師事先準備好白紙並把等分點先標示好，方便學生操作。）

1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---



每一塊巧克力等分成3份，每一塊都取其中的二份（綠色部分）

4 看圖思考如何求 $7 \times \frac{2}{3}$ 之解

教師提問：每一塊巧克力被分成3小份，每一小份是多少塊？（ $\frac{1}{3}$ 塊）

教師提問：每一塊都取二小份，共取多少小份？

怎麼列式表示呢？（提示：每一排有幾小份？二排呢？ $7 \times 2 = 14$ ）

7塊的 $\frac{2}{3}$ 也就是 7×2 個 $\frac{1}{3}$ 塊，所以 $7 \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 2}{3} = \frac{14}{3}$

5. 教師提問：從以上的題目你發現整數乘以真分數比較快的算法了嗎？（讓同學自由發表）

歸納：整數 \times 真分數的算則是分母不變，然後將整數乘以分子做為新的分子，就

得到答案了，即 $a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$

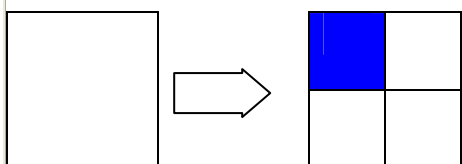
（二）單位分數 \times 單位分數

佈題： $\frac{1}{2}$ 張色紙的 $\frac{1}{2}$ 是幾張色紙？

1. 把問題用算式填充題記下來。 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\quad)$

2. 操作紙片，先折出 $\frac{1}{2}$ 張，再折出 $\frac{1}{2}$ 張的 $\frac{1}{2}$ ，並將結果著色

（藍色），最後打開色紙，並進行觀察。



4. 教師提問：由折痕可以看出一張色紙共等分割成幾個一樣大的區塊（或細格）？用乘法怎麼記？

$$2 \text{（一排有 2 個）} \times 2 \text{（2 排）} = 4$$

5. 教師提問： $\frac{1}{2}$ 張的 $\frac{1}{2}$ （塗色部分-藍）佔了幾個區塊（細格）？用乘法怎麼記？

$$1 \text{（一排有 1 個）} \times 1 \text{（排）} = 1$$

6. 教師提問：一張紙有 4 個細格， $\frac{1}{2}$ 張的 $\frac{1}{2}$ （塗色部分-藍）佔了 1 個細格，所以 $\frac{1}{2}$ 張的 $\frac{1}{2}$ 是幾張？（ $\frac{1}{4}$ 張）

7. 教師提問：分母 4 是怎麼得到的？（ 2×2 ）

8. 教師提問：分子 1 是怎麼得到的？（ 1×1 ）

9. 教師提問：如何列出得到答案 $\frac{1}{4}$ 式子？（ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$ （張））

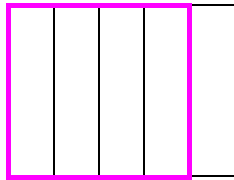
(教師可以求面積公式的概念帶入引導學生觀察，經過2次分割後的色紙形成1排有2個細格，2排共有4個細格，著色部份佔1個細格是全部的1/4)

(三) 真分數×真分數

佈題： $\frac{4}{5}$ 張色紙的 $\frac{2}{3}$ 是幾張色紙？

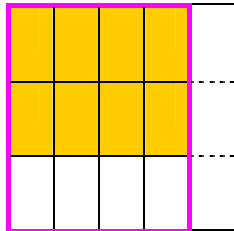
1. 把問題用算式填充題記下來。 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = (\quad)$

2. 在請學生在紙片中用色筆畫出 $\frac{4}{5}$ 的周界。



3. 請學生沿著寬邊的3個等分點折一折，然後將紙打開，將 $\frac{4}{5}$ 張的 $\frac{2}{3}$ 塗色。

4. 教師提問：這張紙片共被等分成幾個細格？用乘法怎麼記？



$$5 \text{ (一排有 5 個)} \times 3 \text{ (排)} = 15 \text{ (個)}$$

5. 教師提問： $\frac{4}{5}$ 張的 $\frac{2}{3}$ (塗色部分) 佔了幾個細格？用乘法怎麼記？

$$4 \text{ (一排有 4 個)} \times 2 \text{ (排)} = 8 \text{ (個)}$$

6. 教師提問： $\frac{4}{5}$ 張的 $\frac{2}{3}$ 是幾張？($\frac{8}{15}$ 張)

7. 教師提問：分母15是怎麼得到的？(5×3)

8. 教師提問：分子8是怎麼得到的？(4×2)

9. 教師提問：如何列出得到答案 $\frac{8}{15}$ 的式子？

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15} \text{ (張)} \right)$$

10. 教師提問：從以上的題目你發現真分數乘以真分數比較快的算法了嗎？（讓同學自由發表）

歸納：真分數 \times 真分數的作法是將兩分數的分母乘以分母（經過兩次分割後的細格數）、分子乘以分子（塗色部分所佔的細格數），所得到得分數就是答案了。

也就是， $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$

活動二：帶分數乘法

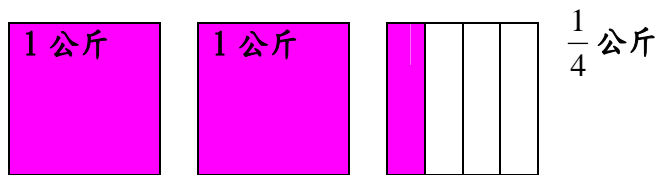
（一）帶分數 \times 真分數

佈題：一包麵粉是 $2\frac{1}{4}$ 公斤，媽媽做蛋糕用了 $\frac{2}{3}$ 包，媽媽用了多少公斤的麵粉？

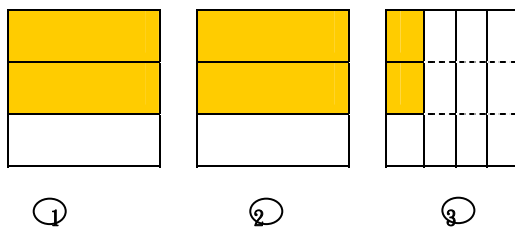
1. 把問題用算式填充題記下來。

$$2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = (\quad)$$

2. 教師利用作圖表示出 $2\frac{1}{4}$ 公斤是有 2 個整體 1 公斤和 1 個 $\frac{1}{4}$ 公斤。



3. $2\frac{1}{4}$ 公斤的 $\frac{2}{3}$ ，是說將 $2\frac{1}{4}$ 公斤平分成三份取其中的二份。



4. 教師提問：③中整體 1 被分成幾小格？如何用算式表示？（ $4 \times 3 = 12$ ）

5. 教師提問：每 1 小格是整體 1 的幾分之幾，也就是幾公斤？（ $\frac{1}{12}$ 公斤）

6. 教師提問：③ 中黃色的部分佔 2 小格，是全部的多少？（ $\frac{2}{12}$ ）

7. 教師提問：也就是幾公斤？（ $\frac{2}{12}$ 公斤）

8. 教師提問：② 中的黃色部分是整體 1 的幾分之幾？（ $\frac{2}{3}$ ）

9. 教師提問：也就是幾公斤？（ $\frac{2}{3}$ 公斤）

10. 教師提問：① 中的黃色部分是整體 1 的幾分之幾？（ $\frac{2}{3}$ ）

11. 教師提問：也就是幾公斤？（ $\frac{2}{3}$ 公斤）

12. 教師提問：由上作圖，可以知道 $2\frac{1}{4}$ 公斤的 $\frac{2}{3}$ ，即是黃色部分①+②+③，要如

何將三個部分相加起來？（把每個整體 1 都被平分成 12 小格時，每一小格是 $\frac{1}{12}$ 。

黃色部分①是佔了 8 小格。黃色部分②也是佔了 8 小格。

黃色部分③是佔了 2 小格。黃色部分①+②+③ 共有 18 小格，也就是 $\frac{18}{12}$

所以 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12} + \frac{8}{12} + \frac{2}{12} = \frac{18}{12}$ （公斤）

13. 教師提問： $2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} =$ （ ）的答案是多少？（ $\frac{18}{12}$ （公斤））

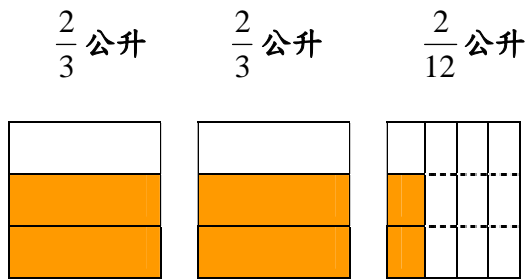
（二）真分數×帶分數

佈題：1 杯果汁是 $\frac{2}{3}$ 公升， $2\frac{1}{4}$ 杯是幾公升？

1. 把問題用算式填充題記下來。

$$\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} = (\quad)$$

2. 利用作圖表示出：



3. 教師提問：由圖中觀察 $\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4}$ 是什麼意思？（2 個 $\frac{2}{3}$ 公升和 $\frac{1}{4}$ 個 $\frac{2}{3}$ 公升相加）

4. 教師提問： $\frac{1}{4}$ 個 $\frac{2}{3}$ 公升是多少公升？（ $\frac{2 \times 1}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$ 公升）

5. 教師提問：如何將 2 個 $\frac{2}{3}$ 公升和 $\frac{1}{4}$ 個 $\frac{2}{3}$ 公升相加起來？（把每一個整體 1（公升）都等分成 12 小份， $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ 和 $\frac{2}{12}$ 就能相加了）

6. 教師提問：2 個 $\frac{2}{3}$ 公升和 $\frac{1}{4}$ 個 $\frac{2}{3}$ 公升相加的過程如何列出算式？（ $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12} + \frac{8}{12} + \frac{2}{12} = \frac{18}{12}$ （公升））

7. 教師提問： $\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} = (\quad)$ 的答案是多少？（ $\frac{18}{12}$ （公升））

（三）帶分數×帶分數

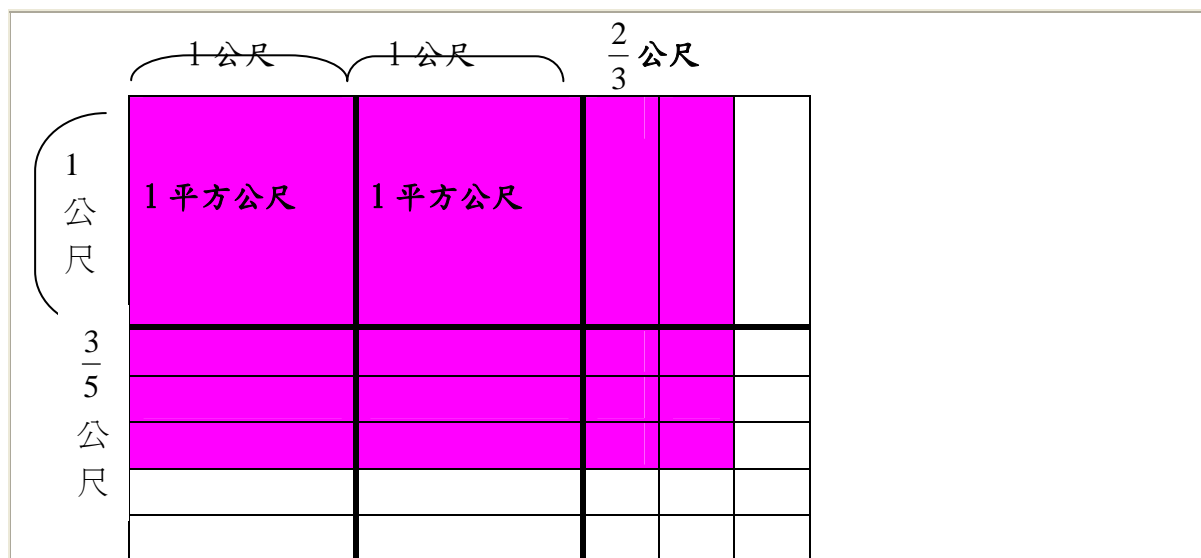
佈題：有一塊長 $2\frac{2}{3}$ 公尺，寬 $1\frac{3}{5}$ 公尺的長方形花園，它的面積是多少平方公尺？

1. 把問題用算式填充題記下來。 $2\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5} = (\quad)$

2. 利用作圖表示出：

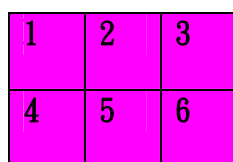
長 $2\frac{2}{3}$ 公尺，是有 2 個整體 1 公尺和 2 個 $\frac{1}{3}$ 公尺。

寬 $1\frac{3}{5}$ 公尺，是有 1 個整體 1 公尺和 3 個 $\frac{1}{5}$ 公尺。



由上面作圖，知道紅色部分的大小即是我們所求的面積大小。

為方便解說，我們將紅色部分分成六部分。



- 教師提問：紅色 1，長是 1 公尺，寬是 1 公尺，面積是多少平方公尺？（1 平方公尺）
2. 教師提問：紅色 2，長是 1 公尺，寬是 1 公尺，面積是多少平方公尺？（1 平方公尺）
3. 教師提問：紅色 3，是將整體 1（平方公尺）平分成三份取其中的兩份，面積是多少平方公尺？（ $\frac{2}{3}$ 平方公尺）。
4. 教師提問：紅色 4，是將整體 1（平方公尺）平分成五份，取其中的三份，面積是多少平方公尺？（ $\frac{3}{5}$ 平方公尺）。
5. 教師提問：紅色 5，也是將整體 1（平方公尺）平分成五份，取其中的三份，面積是多少平方公尺？（ $\frac{3}{5}$ 平方公尺）。
6. 教師提問：紅色 6，整體 1（平方公尺）被平分為 15 小格，每一小格是多少平方公尺？（ $\frac{1}{15}$ 平方公尺）。
7. 教師提問：紅色部分佔了 6 小格，所以紅色 6 面積是多少平方公尺？（ $\frac{6}{15}$ 平方公尺）。
8. 教師提問：如何將以上六個部份的面積相加起來？

（將每個整體 1（圖中共有 6 個整體 1），都平分為 15 小格。每一小格是 $\frac{1}{15}$ 。從圖

中發現： $1 = \frac{15}{15}$ ； $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ； $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ ，分母相同，也就是單位分數一樣，這樣就能相加了。）

8. 教師提問：紅色部分 1、2、3、4、5、6 相加起來的過程，要如何列出算式表示？

$$(1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{15} = \frac{15}{15} + \frac{15}{15} + \frac{10}{15} + \frac{9}{15} + \frac{9}{15} + \frac{6}{15} = \frac{15+15+10+9+9+6}{15} = \frac{64}{15} \text{ (平方公尺)})$$

9. 教師提問： $2\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5} = (\quad)$ 的答案是多少？ ($\frac{64}{15}$ (平方公尺))

活動三：假分數乘法

1. 假設：真分數的乘法算則 ($\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$) 也能適用於假分數的乘法。

2. 驗證：將活動二佈題中的帶分數都換成假分數並套用真分數乘法算則進行運算

教師提問：真分數的乘法算則 ($\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$) 也能適用於假分數的乘法嗎？

佈題 (一)：一包麵粉是 $2\frac{1}{4}$ 公斤，媽媽做蛋糕用了 $\frac{2}{3}$ 包，媽媽用了多少公斤的麵粉？

(活動二計算結果： $\frac{18}{12}$ (公斤))

$$2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{18}{12} \text{ (公斤)}$$

教師提問：以上計算結果與 (活動二) 計算結果一樣嗎？ (一樣)

佈題 (二)：1 杯果汁是 $\frac{2}{3}$ 公升， $2\frac{1}{4}$ 杯是幾公升？ (活動二計算結果： $\frac{18}{12}$ (公升))

$$\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{18}{12} \text{ (公升)}$$

教師提問：以上計算結果與 (活動二) 計算結果一樣嗎？ (一樣)

佈題 (三)：有一塊長 $2\frac{2}{3}$ 公尺，寬 $1\frac{3}{5}$ 公尺的長方形花園，它的面積是多少平方公尺？

(活動二計算結果： $\frac{64}{15}$ (平方公尺))

$$2\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5} = \frac{8}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{64}{15} \text{ (平方公尺)}$$

教師提問：以上計算結果與（活動二）計算結果一樣嗎？（一樣）

3. 結論：請同學就以上計算結果做出結論。（假分數乘法套用真分數乘法算則也能適用。）

◎綜合活動

教師請學生就整個活動結果歸納整理出方便我們進行分數乘法運算的算則。

歸納：分數乘法的算則是： $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ ，如果遇到帶分數，可以先化成假分數再套用此算則，可以讓運算過程更簡便。

肆、教學省思

1. 利用面積圖形表徵進行分數乘法教學，要強調的地方是：整體「1」透過二次分割後的等分割總數以及形成分子總數的乘法算式，也就是 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$ 的

$\frac{b \times d}{a \times c}$ 這個步驟，不宜省略跳過而直接呈現答案，這樣才能讓學生充份觀察、理解分數乘法中分子相乘與分母相乘的由來。

2 處理帶分數相乘問題，透過先處理「分數與分數」相乘部份，再讓學生發現其他相乘部份必須找出與「分數與分數」相乘部份相同的單位分數，才能彼此相加起來，藉以突顯整體「1」被分割總數（也就是分母）以及分子總數的由來，其中利用面積圖形表徵是可以發揮很大的功用。

3 在學生學習以面積模式理解分數乘法算則後，是否能將能力遷移到其他圖形表徵（例如線段圖形表徵等），表示已充份理解分數乘法的抽象意義，仍是一個待探究的問題