

抽絲剝繭

《以 Polya 數學解題模式運用於推理教學》

蔡啟禎

高雄市成功國小學務主任

壹、前言

數學的探究與大多數的科學探究一樣，都是從歸納、推理開始的；著名數學家波利亞(Polya)曾說：「數學是需要用猜測造成的」，而最初的猜想是數學最具創造力的部分。而國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域中也提及「學生能力的發展始於流利的基礎運算和推演、對數學概念的理解，然後懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題」，以及在不熟悉的解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑。抽象化能力始於能運用符號、記號、模型、圖形或其他數學語言、清楚傳達量化、邏輯關係。發展邏輯思考，用來分析證據、提出支持或否定假設的論點。啟發學生自行在不同數學概念之間做連結，....。學生要能將數學運用於日常生活中，學習欣賞數學，從而發展探究數學以及與數學相關學科的興趣。」(教育部，2003)，可見數學課程愈來愈重視推理能力。然而，目前國小數學課程並未提供學生充足的推理經驗課程，因此，在國小數學教學過程中設計推理的活動，引導學生漸漸往「論述性了解」的學習層次邁進，是有其必要性的。有鑑於此，本文特別選擇「推理教學」為題材，透過「Polya 解題模式」之教學，期望引導學生對推理思考能夠有深層認識，並運用於日常生活中。

什麼是推理能力？推理能力指的就是以某種原則為基礎，由已知的跡象，推求未知結果的過程，由既有資料引出新概念的思考，個體必須根據系統性的原則，在各前提、實例間建立起特殊關係，以進行評鑑，產生邏輯論點(張春興，1991)。數學推理技巧是一種思考過程，學生對某些概念的了解必須與某些事物拉上關係。故此為培訓推理技巧而設的活動，必須深藏於情靜脈絡(contextual settings)內(NCTM, 1997)。而這些情靜脈絡可包括圖形大小及數字型類等，它們均能協助學生發揮思考能力。Resnick(1987)曾強調教育目標主要是在教導學生思考(thinking)，無論是多麼簡單的學習，學生都必須透過思考以解釋所要學習的材料。Kline(1994)在分析影響學生學習成效的能力中也指出：抽象思考、運用與問題有關之知識的能力及進行邏輯的推理是學習過程中重要的一環。更有學者認為，沒有歸納推理的能力，學習便無法進行(Nickerson, 1991；張秀蓁，1996)。國內學者陳李綢(1992)也認為問題解決能力中的一般問題解決能力是個人思考及推理的能力；從認知的歷程分析，推理思考與問題解決息息相關；因此在解題過程中，推理能力佔有一定的份量，了解解題的歷程，有助於我們對推理能力的認識。可見推理能力與學習間的關係受到肯定。

本活動「以 Polya 數學解題模式運用於推理教學」嘗試以 Polya(1993)數學解題模式應用於問題情境的推理教學，將教學理論與教學實務相結合。Polya 數學解題模式分成下列四個步驟：1. 了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。2. 擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。3. 執行計畫：依擬定計畫，進行推理解題。4. 回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。期望學生了解其解題模式，運用在推理教學，對於學生之學習成效能有相當的助益。

貳、教學設計架構

本活動設計以題組提問方式進行教學，給定一個問題情境，再配以多個問題。將波利亞數學解題模式的四個解題步驟「了解問題—擬訂計畫—執行計畫—回顧解答」融入「瞭解問題中已知的條件與未知的問題—將已知的條件與未知的問題產生關連—將已知條件為基礎，進行推理解題—檢視解答的合理性與正確性」教學流程之中，做詳盡的規畫。

首先，教師引導學生問題情境，以確實瞭解情境中條件關係；其次，引導學生從情境中條件關係，推理判斷問題的結果；最後，回顧自己的解題檢視是否符合題意。教學設計架構如圖 1。

以下則針對本教學活動的教學目標、能力指標、教學安排、教學對象、教學時間、評量與回饋等想法如下：

一、教學目標：

引導學生於問題情境中的關係，培養學生運用 Polya 解題模式進行解題。

二、能力指標：

(一) C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。

(二) C-S-03 能熟悉解題的各種方法：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。

(三) C-S-04 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。

(四) C-C-01 能了解數學語言(符號、用語、圖表、非形式化演繹等)的內涵。

(五) C-E-01 能用解題的結果闡釋原來情境問題。

三、教學安排：

本教學活動的實施在教室透過單槍，引導學生討論與解題。

四、教學對象：國小六年級學生。

五、教學時間：1 節課 40 分鐘。

六、評量與回饋：1 節課 40 分鐘。

以 Polya 數學解題模式運用於推理教學

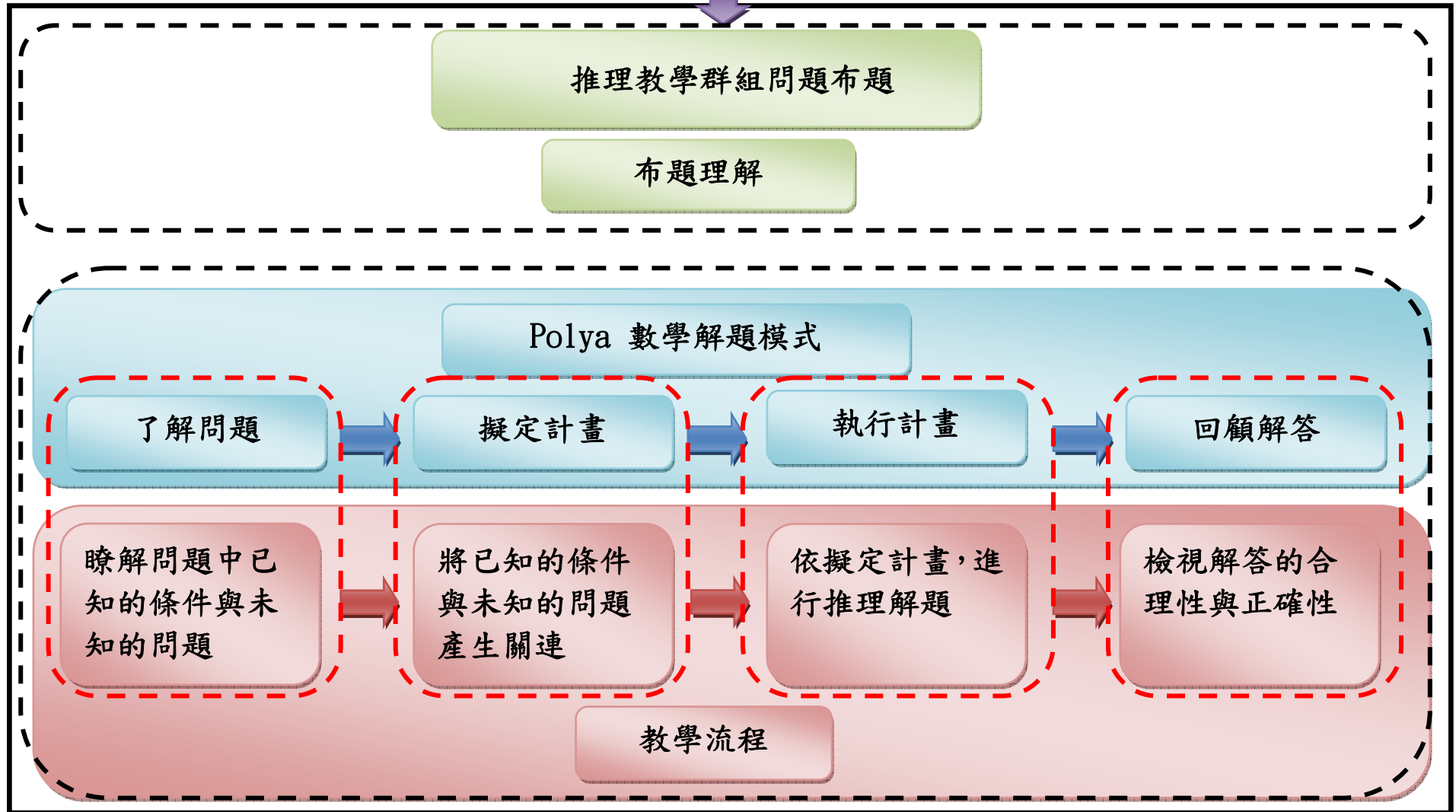


圖 1 教學設計架構圖

參、教學活動

活 動 內 容 想 法

【教師布題】

成功國小辦理為期一週的暑期育樂營，有 7 個代號分別為 J、K、L、M、N、O、P 的活動要排定，從星期日開始，每天只安排 1 個活動：

- 1.活動 J 在星期日辦理。
- 2.活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理。
3. N、O、P 等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【布題理解】

成功國小辦理的暑期育樂營：

- 1.從哪一天開始為期一週？
- 2.共辦理哪些活動？
- 3.一天安排幾個活動？
- 4.星期日辦理哪一個活動？
- 5.如果在星期二辦理活動 L，星期三辦理活動 K，可不可以？
6. L 和 M 兩個活動有沒有限制哪一個活動先辦理？
7. P、O、N 等三個活動有沒有限制哪一個活動先辦理？

【推理群組問題】

一、活動 L 最遲要在哪一天辦理？

(一)了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。

【已知條件】

- (1)活動 J 在星期日辦理。
- (2)活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理。
- (3) N、O、P 等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【未知問題】活動 L 最遲要在哪一天辦理？

(二)擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。

- 1.以星期六、星期五、…的順序逆推活動 L 最遲辦理日期的合理解。
- 2.利用列表推論。

(三)執行計畫：依擬定計畫，進行推理解題。

1.如果活動 L 在星期六辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J						L

【想法】不合理，因為如果活動 L 在星期六辦理，則活動 K 就無法於一週內辦理，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

2.如果活動 L 在星期五辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	N	O	P	M	L	K
J	M	N	O	P	L	K

【想法】合理，因為如果活動 L 在星期五辦理，則 N、O、P 等三個活動可在星期一到星期三或星期二到星期四辦理。如果 N、O、P 等三個活動可在星期一到星期三辦理，則活動 M 在星期四辦理、活動 K 在星期六辦理；如果 N、O、P 等三個活動可在星期二到星期四辦理，則活動 M 在星期一辦理、活動 K 在星期六辦理。

【結果】活動 L 最遲在星期五辦理。

(四)回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。

如果 L 在星期五辦理，可能的辦理順序如下表：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	N	O	P	M	L	K
J	M	N	O	P	L	K

經檢視答案，均符合條件。

二、下列哪些項活動順序是合理的？

- 1.活動 L 緊接在活動 J 之後辦理，K 在星期六辦理
- 2.活動 L 緊接在活動 O 之後辦理，N 在星期三辦理
- 3.活動 K 緊接在活動 O 之後辦理，K 在星期五辦理
- 4.活動 M 緊接在活動 P 之後辦理，L 在星期六辦理
- 5.活動 P 緊接在活動 K 之後辦理，N 在星期六辦理

(一)了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。

【已知條件】

- (1)活動 J 在星期日辦理。
- (2)活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理。
- (3) N、O、P 等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【未知問題】合理的活動順序？

(二)擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。

- 1.根據已知條件。
- 2.利用列表推理。

(三)執行計畫：將已知條件為基礎，進行推理解題。

1.活動 L 緊接在活動 J 之後辦理，K 在星期六辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	N	O	P	M	K
J	L	M	N	O	P	K

【想法】活動 L 緊接在活動 J 之後辦理，所以 L 在星期一辦理，又活動 K 在星期六辦理，N、O、P 等三個活動可以在星期二至星期四辦理、活動 M 在星期五辦理；或者 N、O、P 等三個活動可以在星期三至星期五辦理、活動 M 在星期二辦理。合理。

2.活動 L 緊接在活動 O 之後，N 在星期三辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J			N	P	O	L

【想法】活動 N 在星期三，而 L 又緊接在 O 之後辦理，則 P、O、L 等三個活動則在星期四到星期六辦理，活動 K 就無法在一週內辦理，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

3.活動 K 緊接在活動 O 之後，K 在星期五辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J		N	P	O	K	

【想法】K 在星期五辦理時，N、P、O 等三個活動只有在星期二到星期四辦理，活動 K 就不可能在活動 L 和活動 M 之後辦理，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

4.活動 M 緊接在活動 P 之後，L 在星期六辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	K	O	N	P	M	L

【想法】活動 L 在星期六辦理，活動 M 緊接在活動 P 之後，所以，活動 P 必須在 N、O 等二個活動之後辦理，N、O、P、M 等四個活動在星期二到星期五辦理，活動 K 在星期一辦理就不可能在活動 L 和活動 M 之後辦理，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

5.活動 P 緊接在活動 K 之後，N 在星期六辦理：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	M	K	P	O	N
J	M	L	K	P	O	N

【想法】活動 N 在星期六辦理，活動 P 緊接在活動 K 之後辦理，所以，活動 P 必須在 N、O 等二個活動之前辦理，K、P、O、N 等四個活動在星期三到星期六辦理，活動 M 和活動 L 就可安排在星期一或星期二辦理。合理。

【結果】合理的活動順序：

1.活動 L 緊接在活動 J 之後辦理，K 在星期六辦理。

5.活動 P 緊接在活動 K 之後，N 在星期六辦理。

(四)回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六

J	L	N	O	P	M	K
J	L	M	N	O	P	K
J	L	M	K	P	O	N
J	M	L	K	P	O	N

經檢視答案，均符合條件。

三、如果活動 O 在星期六辦理，那麼活動 K 必須在哪一天辦理？

(一)了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。

【已知條件】

(1)活動 J 在星期日辦理。

(2)活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理。

(3) N、O、P 等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【未知問題】如果活動 O 在星期六辦理，那麼活動 K 必須在哪一天辦理？

(二)擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。

1.根據已知條件。

2.利用列表推理。

(三)執行計畫：依擬定計畫，進行推理解題。

如果活動 O 在星期六辦理：

1.活動 N 和活動 P 應該在哪兩天辦理？為什麼？

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
				N	P	O

【想法】根據條件「活動 N、活動 O、活動 P 在連續三天辦理」，活動 N 和活動 P 應該在星期四和星期五辦理。

2.活動 L 或活動 M 可不可以在星期三辦理？為什麼？

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
				N	P	O

【想法】不可以，因為如果活動 O 在星期六辦理，根據「活動 N、活動 O、活動 P 在連續三天辦理」，則 N、P 等二個活動必須在星期四到星期五辦理，加上活動 L 或活動 M 在星期三辦理，則活動 K 即無法在活動 L 和活動 M 與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

3.如果活動 O 在星期六辦理，活動 L 和活動 M 只可以在哪兩天辦理？

【想法】根據條件「活動 N、活動 O、活動 P 在連續三天辦理」和「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」，活動 L 和活動 M 只可以在星期一和星期二辦理。

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
I	L	M	K	N	P	O

J	M	L	K	N	P	O
---	---	---	---	---	---	---

【結果】如果活動 O 在星期六辦理，那麼活動 K 必須在星期三辦理。

(四)回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。

如果 L 在星期五辦理，可能的辦理順序如下表：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	M	K	N	P	O
J	M	L	K	N	P	O

經檢視答案，均符合條件。

四、下列哪一項是連續三天可能辦理活動的順序？請敘明理由。

1. J、M、K 2. K、L、O 3. M、N、J 4. O、J、N
5. P、O、M

(一)了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。

【已知條件】

(1)活動 J 在星期日辦理。

(2)活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理。

(3) N、O、P 等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【未知問題】連續三天可能活動的順序？

(二)擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。

1. 連續三天可能的組合：星期日至星期二、星期一至星期三、星期二至星期四、星期三至星期五、星期四至星期六。
2. 利用列表推理。

(三)執行計畫：依擬定計畫，進行推理解題。

1. J、M、K：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	M	K				

【想法】因為 J 在星期日辦理，所以 J、M、K 必定安排在星期日至星期二辦理。但活動 K 之前應該還有活動 L，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

2. K、L、O：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J						

【想法】活動 K 之在活動 L 之前辦理，與條件「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」矛盾。

3. M、N、J：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J						

【想法】J 在星期日辦理，M 和 N 在 J 之前辦理，與條件「活動 J 在星期

日辦理」矛盾。

4. O、J、N：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J						

【想法】J在星期日辦理，O在J之前辦理，與條件「活動J在星期日辦理」矛盾。

5. P、O、M：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	N	P	O	M	L	K
J	L	N	P	O	M	K

【想法】因為「活動N、活動O、活動P在連續三天辦理」和「活動K在活動L和活動M之後辦理」，所以，活動N必定排在O和P兩個活動之前；N、P、O、M可能安排在星期一至星期四或星期二至星期五辦理，星期日至星期六辦理活動的順序如上表。

【結果】連續三天可能辦理活動的順序為：5. P、O、M。

(四)回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。

如果L在星期五辦理，可能的辦理順序如下表：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	N	P	O	M	L	K
J	L	N	P	O	M	K

經檢視答案，均符合條件。

五、如果N、O、P等三個活動在星期二至星期四辦理，從星期日到星期六可能活動的順序有哪些？

(一)了解問題：瞭解問題中已知的條件與未知的問題。

【已知條件】

(1)活動J在星期日辦理。

(2)活動K在活動L和活動M之後辦理。

(3)N、O、P等三個活動必須在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理。

【未知問題】如果N、O、P等三個活動在星期二至星期四辦理，從星期日到星期六可能活動的順序有哪些？

(二)擬定計畫：將已知的條件與未知的問題產生關連，擬出推理策略。

1.如果N、O、P等三個活動在星期二至星期四辦理，K、M、L等三個活動則在星期一、星期五和星期六辦理。

2.根據「活動N、活動O、活動P在連續三天辦理，但不一定按照前面排列順序辦理」，星期二至星期四可能辦理的順序：

星期二	星期三	星期四
N	O	P
N	P	O
O	N	P
O	P	N
P	N	O
P	O	N

3.根據「活動 K 在活動 L 和活動 M 之後辦理」，K、M、L 等三個活動可能辦理的順序：

星期一	星期五	星期六
M	L	K
L	M	K

4.利用列表推理。

(三)執行計畫：依擬定計畫，進行推理解題。

1.如果星期二至星期四辦理的順序為：N、O、P，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	N	O	P	M	K
J	M	N	O	P	L	K

【想法】N、O、P 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

2.如果星期二至星期四辦理的順序為：N、P、O，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	N	P	O	M	K
J	M	N	P	O	L	K

【想法】N、P、O 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

3.如果星期二至星期四辦理的順序為：O、N、P，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	O	N	P	M	K
J	M	O	N	P	L	K

【想法】O、N、P 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

4.如果星期二至星期四辦理的順序為：O、P、N，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	O	P	N	M	K
J	M	O	P	N	L	K

【想法】O、P、N 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

5.如果星期二至星期四辦理的順序為：P、N、O，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	P	N	O	M	K
J	M	P	N	O	L	K

【想法】P、N、O 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

6.如果星期二至星期四辦理的順序為：P、O、N，從星期日到星期六可能活動的順序：

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	P	O	N	M	K
J	M	P	O	N	L	K

【想法】P、O、N 等三個活動在星期二至星期四辦理，活動 K 只能在星期六辦理，活動 L 和活動 M 則安排在星期一和星期五辦理。

【結果】如果 N、O、P 等三個活動在星期二至星期四辦理，N、O、P 等三個活動有 6 種排列方式，活動 L、活動 M 有 2 種排列方式，從星期日到星期六可能活動的順序共有 12 種。

(四)回顧解答：檢視解答的合理性與正確性。

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
J	L	N	O	P	M	K
J	M	N	O	P	L	K
J	L	N	P	O	M	K
J	M	N	P	O	L	K
J	L	O	N	P	M	K
J	M	O	N	P	L	K
J	L	O	P	N	M	K
J	M	O	P	N	L	K
J	L	P	N	O	M	K
J	M	P	N	O	L	K
J	L	P	O	N	M	K
J	M	P	O	N	L	K

經檢視答案，均符合條件。

肆、教學評量

「以 Polya 數學解題模式運用於推理教學」評量學習單。

伍、教學省思

推理，是日常生活中欲解決某方面問題常用的思考方式。培根曾說過「數學的目的是訓練我們的思考」，數學提供了推理思考的方法，因此在學習的態度上，應從基本觀念的徹底了解做起，重視推理的過程，努力去尋求解決問題的法則，從認知的歷程分析，推理思考與問題解決息息相關。NCTM 所擬定的「中小學數學教育標準」中 (Standard for School Mathematics) (1989)，提到「數學最重要的功能，乃在於培養一種心理習慣，協助澄清複雜的情境。學生必須學習搜集證據，作成臆測，形成模式，建構相對的例證，並且完成健全的論證」，這是身為一位數學教育工作者努力的目標。

另外，將波利亞數學解題模式的四個解題步驟「了解問題—擬訂計畫—執行計畫—回顧解答」融入「瞭解問題中已知的條件與未知的問題—將已知的條件與未知的問題產生關連—將已知條件為基礎，進行推理解題—檢視解答的合理性與正確性」教學流程之中，期望提升學生的數學思考能力，對於數學的學習有所助益。

參考文獻

- G.波利亞著、閻育蘇譯 (1993)。《怎樣解題》。台北市：九章。
- 教育部 (2003)。《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》。台北：教育部。
- 陳李綢(1992)。國小男女生後設認知能力與數學作業表現相關研究。《教育心理學報》，25，p97-p109。
- 張春興(1991)。《現代心理學》。台北：東華。
- 張秀蓁(1996)。國民中小學學生推理能力測驗編製之研究。國立彰化師範大學特殊教育學系碩士論文，未出版，彰化縣。
- Kline, P. (1994). *Intelligence: The Psychometric view*. London, Routledge.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.. :NCTM.
- Nickerson, R. S. (1991). Modes and models of informal reasoning: A commentary. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp.291-309).
- Resnick, L. B. (1987). *Education and Learning to think*. National Academy Press. pp.1-15, 44-50.