

數學小達人 PBL/ 專題式學習

《用數學探照燈看貨櫃藝術》

高雄市博愛國小 洪雪芬 李書欣

壹、前言

PBL/專題式學習 (Project- Based Learning, 簡稱 PBL) 的重要組成元素是問題、產出、學習者和教師四者, 強調學習始於真實問題、學習表現以產出來衡量、學習者是學習主導者、教師是學習促進者。PBL 強調教師安排真實有意義的任務或問題, 交由學習者去達成或解決, 學習者必須針對問題完成一個或一系列的作品; 學習過程中, 學習者要主動與同儕一起探索問題, 完成任務; 擔任學習促進者角色的教師則要適時提供學習資源的引導, 但不直接傳遞知識 (計惠卿, 2005)。面對 PBL/專題式學習此一教育新思潮, 如何引導學生進行 PBL/專題式學習是大家關注的問題。

芬蘭國家教育董事會常務董事 *Kirsi Lindroos* 在 2005 年 3 月舉行的「國際 PISA 研討會」上指出, 「知識經濟」與「全球化」改變了世界, 也給教育製造了四個艱巨的挑戰, 其中第一個挑戰, 就是如何增進學生「學習如何學習」的技能, 學會如何學習 (learn how to learn) 已比學會事實 (learn to know) 更為重要。的確, 面對資訊快速成長的 21 世紀, 如何培養學生處理資訊、辨識資訊與應用資訊的能力, 是我們迫切需要解決的問題。

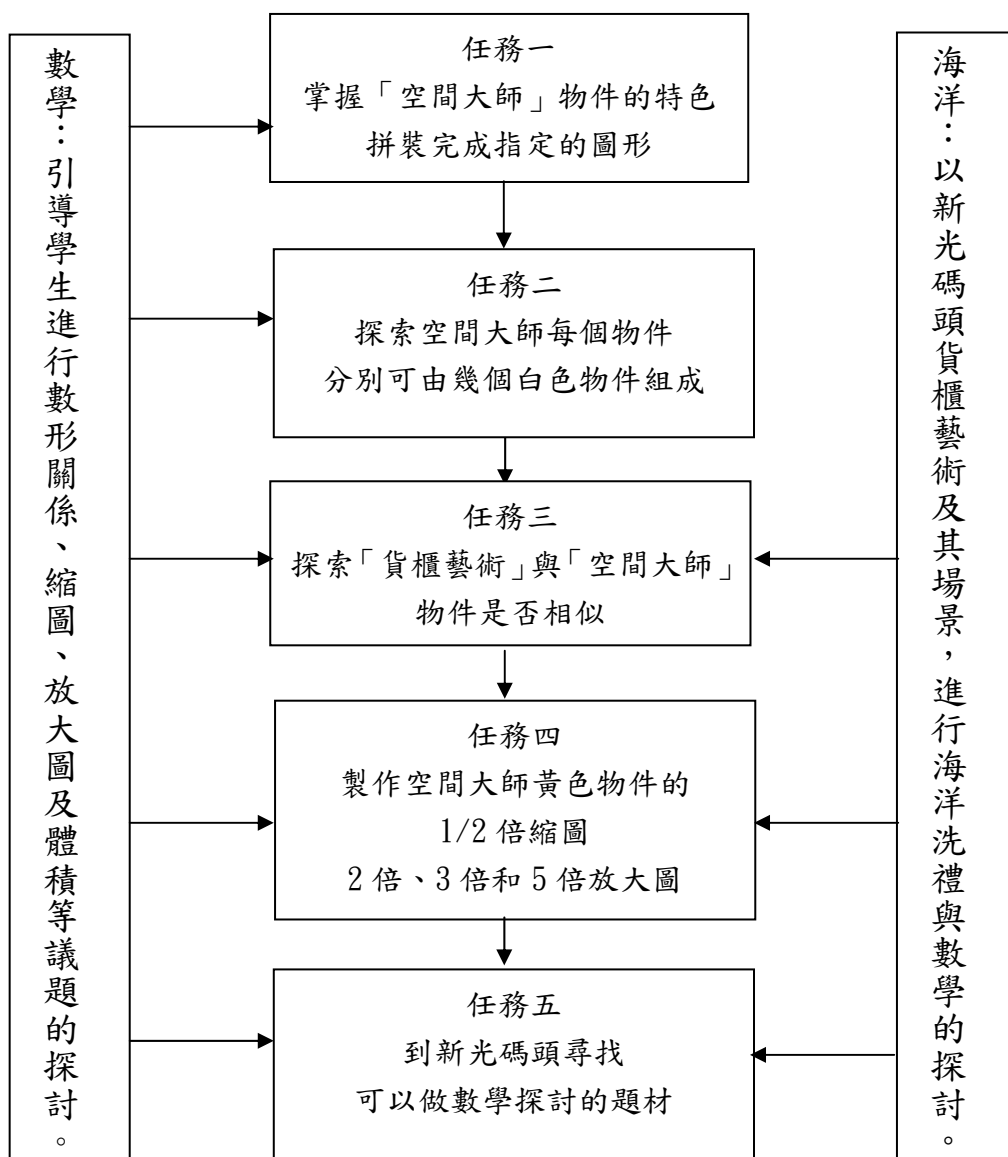
高雄市新光碼頭又名為海洋之星或 21 號碼頭, 走進新光碼頭, 一映入眼簾的就是著名的貨櫃藝術, 這個貨櫃藝術是由六個鮮紅色貨櫃堆組而成的幾何裝置藝術, 號稱新光碼頭地標。由於新光碼頭貨櫃藝術的數學味十足, 又與「空間大師學具」非常相似, 因此, 如何讓學生感受新光碼頭貨櫃藝術的數學味, 如何讓學生體會生活中有很多可以做數學探討的題材, 是值得我們深思的問題。

基於上述問題, 乃設計此一數學小達人 PBL 專題式學習活動《用數學探照燈看貨櫃藝術》, 引導學生進行專題式的學習, 期望透過數學 PBL/專題式學習, 突破學生舊有的學習習慣, 引導學生學會觀察、探索、推理、發表、討論、合作, 增進學生處理資訊、辨識資訊與應用資訊的能力。

貳、教學設計架構

本活動「用數學探照燈看貨櫃藝術」為數學 PBL/專題式學習系列活動之三。活動分為五個任務來進行。任務一：掌握「空間大師」物件的特色，拼裝完成指定的圖形。任務二：探索空間大師每個物件分別可由幾個白色物件組成。任務三：探索「貨櫃藝術」與「空間大師」物件的是否相似。任務四：製作「空間大師黃色物件」的 1/2 倍縮圖和 2 倍、3 倍、5 倍放大圖。任務五：到新光碼頭尋找可以做數學探討的題材。教學設計架構如下圖：

數學小達人 PBL/專題式學習－用數學探照燈看貨櫃藝術



圖一 「數學小達人 PBL/專題式學習－用數學探照燈看貨櫃藝術」設計架構

以下則針對本教學活動的教學目標、教學對象、教學時間、評量與檔案製作等說明如下：

一、教學目標


- (一) 能掌握「空間大師」物件的特色，拼裝完成指定的圖形。
- (二) 能探索「空間大師」的結構，進行數形關係探討。
- (三) 能探索「貨櫃藝術」與「空間大師」物件之相似性關係。
- (四) 能製作「空間大師黃色物件」的 1/2 倍縮圖和 2 倍、3 倍和 5 倍放大圖。
- (五) 能從生活情境中尋找可以做數學的探討的題材。

二、教學對象：國小六年級學生

三、教學時間：五節課 200 分鐘，戶外教學半天。

四、評量與檔案製作：三節課 120 分鐘。

參、專題式學習活動

主要問題與活動		備註															
<p>◎任務一說明：現在每人領取一盒「空間大師」，請掌握「空間大師」物件的特色，並拼裝完成指定的圖形 2-5，2-6，3-9，3-11，組合成功者，請隔壁同學幫你檢查，並簽名打勾。</p> <table border="1" data-bbox="389 1200 1203 1417"> <thead> <tr> <th>空間大師組合圖</th> <th>組合者簽名</th> <th>認證者簽名</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>圖 2-5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>圖 2-6</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>圖 3-9</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>圖 3-11</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			空間大師組合圖	組合者簽名	認證者簽名	圖 2-5			圖 2-6			圖 3-9			圖 3-11		
空間大師組合圖	組合者簽名	認證者簽名															
圖 2-5																	
圖 2-6																	
圖 3-9																	
圖 3-11																	
<p>◎任務一完成後之討論：學生分組完成任務一之後，師生針對任務一進行討論。</p> <p>◆教師：，請說說看「空間大師」是什麼形狀？</p> <p>◆學生：正方體。</p>																	
																	

◆教師：「空間大師」包含哪些物件？

◆學生可能的說法如下：

空間大師包含 15 個物件：1 個紅色，2 個藍色，3 個黃色，4 個綠色，5 個白色。



◆教師：空間大師有 15 個物件，要如何確定你組成的正方體有包含所有物件？

◆學生可能的做法如下：

(1) 先將物件清點好，放在桌上，再組裝，就可以確定沒有遺漏任何物件。

(2) 將物件先整理成下圖，再一一組裝，非常容易確認。



【第一節結束】

◎任務二說明：探索空間大師每個物件，分別可由幾個白色物件組成。

◎任務二完成後之討論：學生分組完成任務二之後，師生針對任務二進行討論。

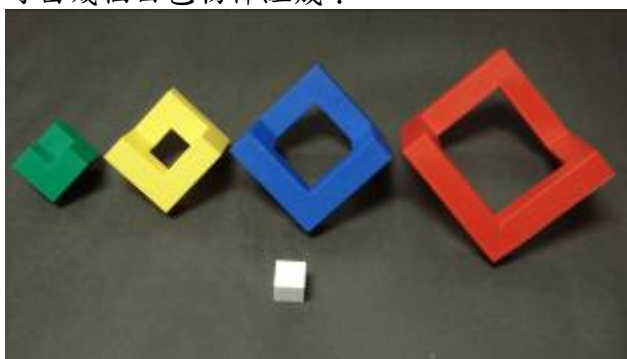
◆教師：請問空間大師的物件中，

1 個綠色物件可由幾個白色物件組成？

1 個黃色物件可由幾個白色物件組成？

1 個藍色物件可由幾個白色物件組成？

1 個紅色物件可由幾個白色物件組成？



◆學生可能的說法如下：

- (1) 用白色物件一一比對點數，結果是：
綠=6 個白、黃=12 個白、藍=18 個白、紅=24 個白。
- (2) 先觀察黃色和藍色，把物件分成上面、下面和中間三部份來看，發現：
綠色：上面、下面都是 3 個白，中間是 0 個白，綠=3+3+0 個白。
黃色：上面、下面都是 5 個白，中間是 2 個白，黃=5+5+2 個白。
藍色：上面、下面都是 7 個白，中間是 4 個白，藍=7+7+4 個白。
紅色：上面、下面都是 9 個白，中間是 6 個白，紅=9+9+6 個白。
- (3) 先觀察紅色，算出每段有 5 個白，乘以 6 段，再扣掉重複的 6 個，發現：
綠色：每邊有 2 個白，所以綠=2×6-6 個白。
黃色：每邊有 3 個白，所以黃=3×6-6 個白。
藍色：每邊有 4 個白，所以藍=4×6-6 個白。
紅色：每邊有 5 個白，所以紅=5×6-6 個白。
- (4) 先觀察紅色，以不重複計數的方式算出每段有幾個白，直接乘以 6，發現：
綠色：每邊有 1 個白，所以綠=1×6 個白。
黃色：每邊有 2 個白，所以黃=2×6 個白。
藍色：每邊有 3 個白，所以藍=3×6 個白。
紅色：每邊有 4 個白，所以紅=4×6 個白。

◆教師：小朋友的觀察和推理都很棒，現在做進一步挑戰。
請問下圖中，每一個造型可由幾個白色物件組成？



◆學生可能的說法如下：

- (1) 我們已經知道，綠=6 個白、黃=12 個白、藍=18 個白、紅=24 個白。所以
2 層=1+6=7、3 層=1+6+12=19、4 層=1+6+12+18=37、5 層=1+6+12+18+24=61。
- (2) 先觀察 4 層，算出每面有幾個白，乘以 3 面，再扣掉重複的部份，最後加 1，發現：4 層：每面有 16 個白，所以 4 層=16×3-4×3+1=37 個白。
其他各圖也依這個規律處理，整理如下：
2 層：每面有 4 個白，所以 2 層=4×3-2×3+1=7 個白。
3 層：每面有 9 個白，所以 3 層=9×3-3×3+1=19 個白。

4層：每面有16個白，所以4層 $=16 \times 3 - 4 \times 3 + 1 = 37$ 個白。

5層：每面有25個白，所以5層 $=25 \times 3 - 5 \times 3 + 1 = 61$ 個白。

(3) 先觀察5層，以不重複數的方式計算，先算第一面有幾個白，再算出第二個面剩下的部份，最後算出第三面剩下的部份，發現：

5層：第一面有 5×5 個白，第二個面剩下部份有 5×4 個白，第三面剩下的部份有 4×4 個白，所以，5層 $=5 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 4 = 61$ 個白。其他各圖也依這個規律處理，整理如下：

2層 $=2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 7$ 個白。

3層 $=3 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 19$ 個白。

4層 $=4 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 37$ 個白。

5層 $=5 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 4 = 61$ 個白。

(4) 先觀察5層，把空間大師組成原來的正方體形狀，然後以剝皮方式處理，發現：5層 $=5 \times 5 \times 5 - 4 \times 4 \times 4$ 個白。其他各圖也依這個規律處理，整理如下：

2層 $=2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 1$ 個白。

3層 $=3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2$ 個白。

4層 $=4 \times 4 \times 4 - 3 \times 3 \times 3$ 個白。

5層 $=5 \times 5 \times 5 - 4 \times 4 \times 4$ 個白。

◆教師：現在只看一面（把它當作平面），請大家仔細觀察並討論看看，可以找出哪些數學規律？



◆學生可能的發現如下：只看顏色，各由幾個白組成？

紅色 $=5 \times 5 - 4 \times 4 = 9$ 個白。

藍色 $=4 \times 4 - 3 \times 3 = 7$ 個白。

黃色 $=3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$ 個白。

綠色 $=2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$ 個白。

◆教師：這個發現很棒，和下面的規律，有什麼異同？

5層 $=5 \times 5 \times 5 - 4 \times 4 \times 4$ 個白。

4層 $=4 \times 4 \times 4 - 3 \times 3 \times 3$ 個白。

3層 $=3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2$ 個白。

2層 $=2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 1$ 個白。

◆學生可能的說法如下：

不同的是：一個是立體的，一個是平面的。

相同的是：都是從一個大的物件，剝掉一部份，成為一個較小的物件。

一個是從 $5 \times 5 \times 5$ 的正方體，剝掉一部份，成為 $4 \times 4 \times 4$ 的正方體。

一個是從 5×5 的正方形，剝掉一部份，成為 4×4 的正方形。

◆學生可能的另一發現如下：由左而右，各由幾個白組成？發現如下規律：

2 層： $1+3=4=2 \times 2$

3 層： $1+3+5=9=3 \times 3$

4 層： $1+3+5+7=16=4 \times 4$

5 層： $1+3+5+7+9=25=5 \times 5$

◆教師：大家可推論 6 層、7 層……10 層，或是 20 層的規律嗎？

◆學生可能的說法如下：

(1) 如果只看幾個白，規律很簡單，規律如下：

2 層： 2×2 、3 層： 3×3 、4 層： 4×4 、5 層： 5×5 、6 層： 6×6 、7 層： 7×7 、

8 層： 8×8 、9 層： 9×9 、10 層： 10×10 、20 層： 20×20 。

(2) 詳細規律如下：

2 層： $1+3=4=2 \times 2$

3 層： $1+3+5=9=3 \times 3$

4 層： $1+3+5+7=16=4 \times 4$

5 層： $1+3+5+7+9=25=5 \times 5$

6 層： $1+3+5+7+9+11=36=6 \times 6$

7 層： $1+3+5+7+9+11+13=49=7 \times 7$

8 層： $1+3+5+7+9+11+13+15=64=8 \times 8$

9 層： $1+3+5+7+9+11+13+15+17=81=9 \times 9$

10 層： $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100=10 \times 10$

那麼 20 層，就是從 1 加 3，依序加到 $20 \times 2 - 1$ ，也就是加到 39。

20 層： $1+3+5+\dots+35+37+39=400=20 \times 20$

【第二、三節結束】

◎任務三說明：本任務在於探索新光碼頭「貨櫃藝術」與「空間大師黃色物件」物件是否相似。



◎任務三完成後之討論：學生分組完成任務三之後，師生針對任務三進行討論。

◆教師：「貨櫃藝術」和「空間大師黃色物件」的結構是一樣的嗎？如何判定？

◆學生可能的說法如下：

(1) 貨櫃是長方體，可以先看其中的一個面是不是正方形，再判定。

- (2) 貨櫃是長方體，可以由能否裁成兩個正方體，來判定。
- (3) 從照片看，中間的空隙稍微大了一些，所以結構應該不一樣。
- (4) 可以上網查詢貨櫃的尺寸，再判定。

◆教師：上網查詢貨櫃的尺寸，結果如何。

◆學生可能的說法如下：

<http://zh.wikipedia.org/wiki/20%E5%91%8E%E6%A8%99%E6%BA%96%E8%B2%A8%E6%AB%83>

各式標準貨櫃尺寸

長	寬	高
20 英尺 (6.1 米)	8 英尺 (2.44 米)	8.5 英尺 (2.59 米)
40 英尺 (12.19 米)	8 英尺 (2.44 米)	8.5 英尺 (2.59 米)
45 英尺 (13.72 米)	8 英尺 (2.44 米)	8.5 英尺 (2.59 米)
48 英尺 (14.63 米)	8 英尺 (2.44 米)	8.5 英尺 (2.59 米)
53 英尺 (16.15 米)	8 英尺 (2.44 米)	8.5 英尺 (2.59 米)

- (1) 貨櫃尺寸有很多種，新光碼頭貨櫃藝術應該是由 20 呎貨櫃組成的。
- (2) 20 呎貨櫃，由寬和高數據來看，不是正方形，長也不是寬的兩倍，所以和空間大師「黃色物件」的結構，是不一樣的。

◆教師：欣聲貨櫃屋提到，<http://www.container.com.tw/usage.htm> 貨櫃可切割改裝成您需求的貨櫃尺寸。那麼，要如何切割貨櫃藝術，才可以和空間大師「黃色物件」的結構，是一樣的。

◆學生：切成寬和高為 2.4 公尺，長為 4.8 公尺的貨櫃，組成的貨櫃藝術和空間大師「黃色物件」的結構就會一樣了。

◆教師：說說看他們兩者之間有些什麼關係？

◆學生可能的說法如下：

- (1) 切成寬和高為 2.4 公尺，長為 4.8 公尺，貨櫃可看成 2 個邊長 240 公分的正方體組成，貨櫃藝術就可以看成是由 12 個邊長 240 公分的正方體組成；而空間大師「黃色物件」是由 12 個邊長 2 公分的正方體組成的，所以貨櫃藝術是空間大師「黃色物件」的 120 倍放大圖。
- (2) 空間大師「黃色物件」的體積是 $2 \times 2 \times 2 \times 12$ (立方公分)，貨櫃藝術的體積是 $240 \times 240 \times 240 \times 12$ (立方公分)，貨櫃藝術的體積是空間大師「黃色物件」體積的 $120 \times 120 \times 120$ 倍。
- (3) 可以直接由邊長是 120 倍，算出體積是 $120 \times 120 \times 120$ 倍。

【第四節結束】

◎任務四說明：本任務是分組製作空間大師黃色物件的 1/2 倍縮圖和 2 倍、3 倍和 5 倍放大圖，每組從下列四種題材，任選兩個題材製作。

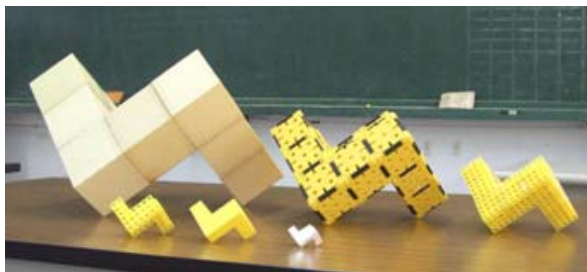
- (1) 用 12 個邊長 1 公分的積木，製作空間大師黃色物件的 1/2 倍縮圖。
- (2) 用 2 公分積木，先製作 12 個邊長 4 公分的積木，再製作空間大師黃色物

件的 2 倍放大圖。

(3) 用正方形幾何智慧片，先製作 12 個邊長 6 公分的積木，再製作空間大師黃色物件的 3 倍放大圖。

(4) 用 12 個邊長 10 公分的公升盒，製作「空間大師黃色物件的 5 倍放大圖。

◎任務四完成後之討論：學生分組完成任務四之後，師生針對任務四進行討論。



◆教師：說說看空間大師黃色物件和它的 1/2 倍縮圖和 2 倍、3 倍和 5 倍放大圖，體積各是多少立方公分，彼此有什麼倍數關係？

◆學生可能的說法如下：

(1) 空間大師黃色物件的體積是 $2 \times 2 \times 2 \times 12 = 96$ (立方公分)

空間大師黃色物件的 1/2 倍縮圖，體積是 $1 \times 1 \times 1 \times 12 = 12$ (立方公分)

空間大師黃色物件的 2 倍放大圖，體積是 $4 \times 4 \times 4 \times 12 = 768$ (立方公分)

空間大師黃色物件的 3 倍放大圖，體積是 $6 \times 6 \times 6 \times 12 = 2592$ (立方公分)

空間大師黃色物件的 5 倍放大圖，體積是 $10 \times 10 \times 10 \times 12 = 12000$ (立方公分)

(2) 空間大師黃色物件的體積是 $2 \times 2 \times 2 \times 12 = 96$ (立方公分)

1/2 倍縮圖，體積是 $1 \times 1 \times 1 \times 12 = 12$ ，是黃色物件的 $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$ 倍。

2 倍放大圖，體積是 $4 \times 4 \times 4 \times 12 = 768$ ，是黃色物件的 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 倍。

3 倍放大圖，體積是 $6 \times 6 \times 6 \times 12 = 2592$ ，是黃色物件的 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 倍。

5 倍放大圖，體積是 $10 \times 10 \times 10 \times 12 = 12000$ ，是黃色物件的 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 倍。

【第五節結束】

任務五說明：今天我們到新光碼頭，除了進行「空間大師黃色物件和貨櫃藝術」超級比一比之外，最主要的任務是尋找可以做數學探討的題材。

◎學生分組完成任務五之後，師生針對任務五進行討論。

◆教師：請說說看你們找到哪些可以做數學探討的題材

◆學生可能的說法如下：



可以探討如何測量水池的直徑。



可以出「植樹問題」。

【半天校外教學結束】

肆、教學評量

本活動之評量以群組評量為主，重點是期望學生能將學習歷程資料做有系統的整理在。時間安排為三節課，學生四人一組，利用兩節課的時間製作學習檔案，第三節課則由學生分組上台報告、相互提問討論及互評。教師則根據如下之小組評量表逐項評分。

數學小達人 PBL/專題式學習－用數學探照燈看貨櫃藝術

小組評量表

6 年 班 組別： 組員：

評量項目	評量標準				評量備註
	超級 優秀	表現 良好	符合 要求	有待 加強	
	10 分	8 分	6 分	4 分	
執行任務之表現					
任務一：掌握空間大師物件的特色拼裝完成指定的圖形。					
任務二：探索空間大師每個物件分別可由幾個白色物件組成。					
任務三：探索貨櫃藝術與空間大師物件之相似性關係。					
任務四：製作空間大師黃色物件的 1/2 倍縮圖和 2 倍、3 倍、5 倍放大圖。					
任務五：參加戶外教學到新光碼頭一遊，尋找可以做數學探討的題材。					
團隊互動之表現					
小組分工合作情形					
小組間之互動與討論情形					
小組歷程學習表現					
成果及分享之表現					
學習檔案之內容與品質					
成果報告之口頭報告表現					
總分					

※ 對於該組學生的評量若有需補充的部份，則可將評語填寫在評量備註上。

伍、教學省思

(一) 活動省思：學生在本專題活動中充分展現了觀察、探索和推理的能力，由學生的表現，讓身為老師的我們對於PBL/專題式學習的帶領更具信心。

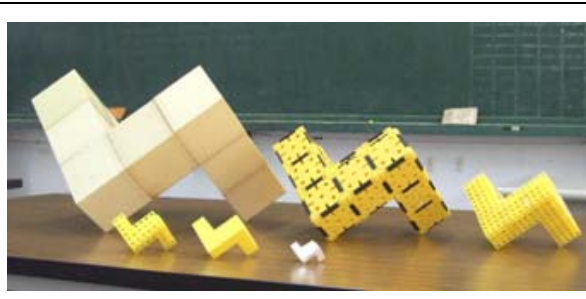
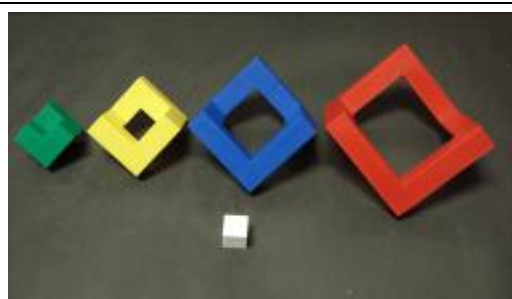
1. 空間大師是一個讓小朋友愛不釋手的幾何教具，小朋友在堆疊的過程中，除了學習到積木組裝的空間概念，還發揮了創意與美學，創造出與眾不同的形體。

2. 探索新光碼頭貨櫃藝術和空間大師黃色物件的結構是否一樣，澄清了學生視覺及比例上的迷思。

3. 透過探索「每個物件分別可由幾個白色物件組成」活動，學生發現了數形規律，也學會用公式記錄數學規律。而製作「空間大師黃色物件」的 $1/2$ 倍縮圖和2倍、3倍、5倍放大圖活動，是活動中的高潮，當將 $1/2$ 倍縮圖和2倍、3倍、5倍放大圖併排於桌上時，學生驚嘆聲連連；而當大家帶著作品到新光碼頭和貨櫃藝術來個超級比一比時，體會更是深刻。



4. 學生解題表現，舉例如下：



如左圖，學生在探討空間大師物件中，綠色、黃色、藍色和紅色物件分別可由幾個白色物件組成時，透過觀察和討論，找出很多數學規律。

(1) 有的組別說：先算出每段有幾個白，乘以 6 段，再扣掉重複的 6 個。

綠色：每邊有 2 個白，所以綠 $=2\times 6-6=6$ 個白。

黃色：每邊有 3 個白，所以黃 $=3\times 6-6=12$ 個白。

藍色：每邊有 4 個白，所以藍 $=4\times 6-6=18$ 個白。

紅色：每邊有 5 個白，所以紅 $=5\times 6-6=24$ 個白。

(2) 有的組別說：可分成上面、下面和中間三段來計算。

綠色：上面、下面都是 3 個白，中間是 0 個白，綠 $=3+3+0=6$ 個白。

黃色：上面、下面都是 5 個白，中間是 2 個白，黃 $=5+5+2=12$ 個白。

藍色：上面、下面都是 7 個白，中間是 4 個白，藍 $=7+7+4=18$ 個白。

紅色：上面、下面都是 9 個白，中間是 6 個白，紅 $=9+9+6=24$ 個白。

如右圖，學生分組製作「空間大師黃色物件」的 $1/2$ 倍縮圖和 2 倍、3 倍和 5 倍放大圖後，不但算出體積還算出比例關係，學生解題如下：

空間大師黃色物件的體積是 $2\times 2\times 2\times 12=96$ (立方公分)

$1/2$ 倍縮圖，體積是 $1\times 1\times 1\times 12=12$ ，是黃色物件的 $1/2\times 1/2\times 1/2=1/8$ 倍。

2 倍放大圖，體積是 $4\times 4\times 4\times 12=768$ ，是黃色物件的 $2\times 2\times 2=8$ 倍。

3 倍放大圖，體積是 $6\times 6\times 6\times 12=2592$ ，是黃色物件的 $3\times 3\times 3=27$ 倍。

5 倍放大圖，體積是 $10\times 10\times 10\times 12=12000$ ，是黃色物件的 $5\times 5\times 5=125$ 倍。

(二) 實施建議：

1. 本專題緣起於高雄市新光碼頭的貨櫃藝術數學味十足，又與「空間大師學具」非常相似，乃規畫本專題活動引導學生進行數形關係、縮圖、放大圖及體積等議題的探討，建議高雄市教師可利用校外教學帶學生來一趟幾何深度之旅，外縣市教師則可以選擇空間大師幾何結構探索之活動來實施即可。

2. 以 DST(Digital Story Telling)數位敘事方式來介紹 PBL 專題式學習，可以讓設計理念和實施成果快速展現，值得推廣。

(請參閱 DST 影片 <http://ds.k12.edu.tw/1000317572/64-2.wmv>)

參考資料

計惠卿 (2005)。PBL 專題導向式學習。民 98 年 3 月 5 日，取自：

<http://www.nhcue.edu.tw/~jih/epbl.htm>