

# 數學 PISA 試題評量—以五年級為例

高雄市旗津國小 陳幸永

## 壹、前言

擔任教學工作多年，透過「說數學」活動，筆者得以瞭解學生的學習歷程與思維活動；也讓低年級學生能從解題經驗中建立數學符號表徵。但從來沒有嘗試過紙筆評量、闖關活動以外的其他評量方式。PISA 評量的對象是 15 歲學生，評量目的是了解學生在數學、科學和閱讀三方面的素養和能力以及面對成人生活的準備度，是一項強調基礎素養與終身學習能力的國際性標準化評量。參加跨縣市「精進數學教學與命題工作坊」，認識了與傳統教學評量目標不同的 PISA 評量，於是，嘗試從 PISA 試題樣本中選取適合國小高年級學生的試題進行評量活動。

## 貳、評量目標

- 一、了解學生解決 PISA 評量開放性問題的解題表現。
- 二、了解每個學生在「木匠」問題與「蘋果」問題中，其數學解題與說理的能力。
- 三、了解全班學生在「木匠」問題與「蘋果」問題中，正確解題與錯誤解題之解題類型。

## 參、實施年級或適用對象

本示例實施年級與對象為高雄市旗津國小五年級 26 位學生。而本示例(蘋果問題、木匠問題)的題材原本是 PISA 針對全球 15 歲學生所設計的題目，但是因為本示例實施對象為國小五年級學生，尚未學習代數教材，因此，筆者在施測時將蘋果問題中關於蘋果樹數量與針葉樹數量的規律之代數表徵問題(問題 6)刪去。

## 肆、實施流程

- 一、分析 PISA 範例題本、選定評量題目。
- 二、進行 PISA 紙筆評量。
- 三、以 PISA 評分規準分析學生解題表現。
- 四、補救教學與學生補充說明。
- 五、評量資料彙整。

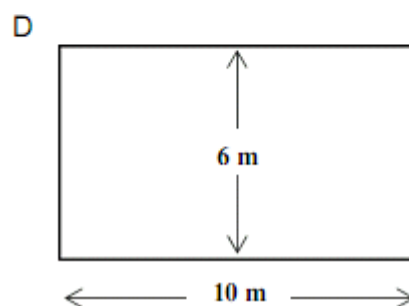
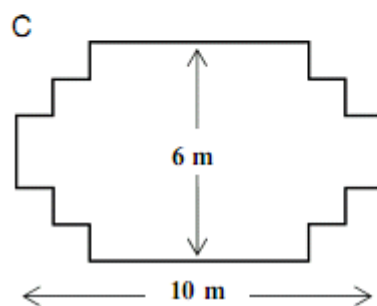
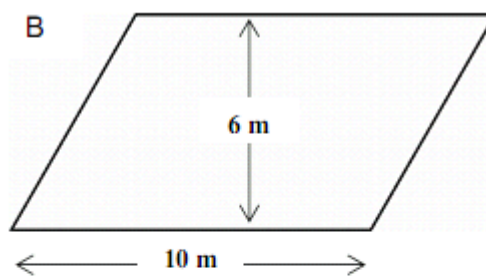
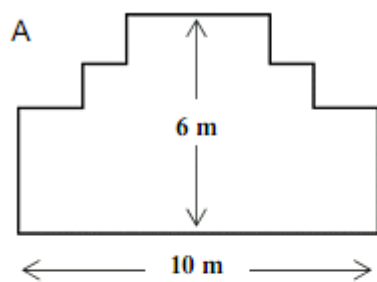
## 伍、評量內容

本示例評量題組共二題，題目如下：

### 第一題：

#### ◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



問題：上面花圃的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。

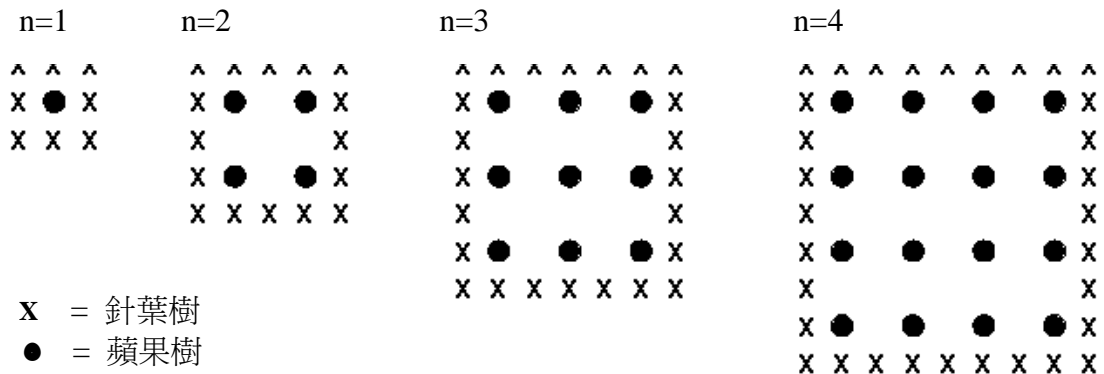
花圃設計	問題 1 是否能用長度 32 公尺的木板圍成	問題 2 請說明你的理由
A 設計	是 / 否	
B 設計	是 / 否	
C 設計	是 / 否	
D 設計	是 / 否	

## 第二題：

### ◆◆◆◆◆ 蘋果 ◆◆◆◆◆

農夫將蘋果樹種在正方形的果園。為了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。

在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數( $n$ )，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：



問題1：請完成下表的空格

n	蘋果樹數	針葉樹數
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。

## 陸、評量標準

### 第一題「木匠」問題 1 之 PISA 評量標準

評量標準
滿分 代號 2：答對四項。 A 設計 是            B 設計 否 C 設計 是            D 設計 是
部分分數 代號 1：答對三項。
零分 代號 0：答對二項或以下。
零分 代號 9：沒有作答

### 第一題「木匠」問題 2 之自訂評量標準

評量標準
滿分 代號 21：說理清楚
部分分數 代號 11：B、C、D 說明正確，僅 A 設計說明有誤 代號 12：A、C、D 說明正確，僅 B 設計說明有誤 代號 13：A、B、D 說明正確，僅 C 設計說明有誤 代號 14：A、B、C 說明正確，僅 D 設計說明有誤
零分 代號 01：僅 A 設計說明正確 代號 02：僅 B 設計說明正確 代號 03：僅 C 設計說明正確 代號 04：僅 D 設計說明正確 代號 05：ABCD 說明全誤
零分 代號 99：沒有作答

## 第二題「蘋果」問題 1 之 PISA 評量標準

評量標準																				
<p>滿分</p> <p>代號 21：7 格全對。</p> <table border="1" data-bbox="480 495 1129 786"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>			n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
<p>部分分數</p> <p>代號 11：n=2、3、4 時均答對，但 n=5 答錯一格或未作答</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>最後一格「40」答錯；其餘均正確。</li> <li>「25」答錯；其餘均正確。</li> </ul> <p>代號 12：n=5 中的數量均答對，但在 n=2 或 3 或 4 中有一格答錯或未作答。</p>																				
<p>零分</p> <p>代號 01：n=2、3、4 時均答對，但 n=5 兩個空格全錯</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>「25」和「40」都答錯；其餘均正確。</li> </ul> <p>代號 02 其他答案</p> <p>代號 99：沒有作答</p>																				

## 第二題「蘋果」問題 2 之 PISA 評量標準

評量標準
<p>滿分</p> <p>代號 21：正確答案(蘋果樹數)，並做有效的解釋。例如：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>蘋果樹數為 <math>n \times n</math>，針葉樹數為 <math>8 \times n</math>，兩個公式都有因數 <math>n</math>，而蘋果樹有另一個 <math>n</math>，<math>n</math> 可以越來越大，但針葉樹另一個因數還是 8。所以蘋果樹數量增加的比較快。</li> <li>蘋果樹數量增加的比較快，因為當 <math>n=8</math> 時，就變為平方數。</li> <li>蘋果樹數是二次函數。針葉樹是線性函數。所以蘋果樹數量會增加的比較快。</li> <li>用作圖證明當 <math>n=8</math> 之後，<math>n^2</math> 會大於 <math>8n</math>。</li> </ul> <p>[注意代號 21 的前提是，學生有寫出 <math>n^2</math> 和 <math>8n</math> 的公式，並作代數的解釋]</p>

## 部分分數

代號 11：正確答案(蘋果樹)，以特例說明，或以表格的延伸進行說明。

- 蘋果樹數會快速增加，因為若我們使用表格（前頁），可以發現蘋果樹數量比針葉樹數量增加的更快。特別是在兩種樹數量一樣之後。
- 表格顯示蘋果樹數量增加得比較快。

或

正確答案(蘋果樹)，用部分證據來說明已知  $n^2$  與  $8n$  的關係，但並沒有像代號 21

清楚地表達。

- $N > 8$  之後的蘋果樹
- 在 8 列之後，蘋果樹數量會增加得比針葉樹數量快。
- 針葉樹，直到 8 列後，會有比較多的蘋果樹。

## 零分

代號 01：正確答案(蘋果樹)，但解釋缺乏、不充分或者錯誤。

- 蘋果樹
- 蘋果樹，因為它們種在內圍，比外圍的數量更多。
- 蘋果樹，因為他們被針葉樹包圍。

代號 02：其它答案

- 針葉樹
- 針葉樹，因為你每種 1 列蘋果樹，你需要再種很多針葉樹。
- 針葉樹，因為每種 1 棵蘋果樹就要種 8 棵針葉樹。
- 我不知道。

代號 99：沒有作答

## 柒、學生之解題表現分析

筆者以 PISA 試題樣本中的木匠問題與蘋果問題作施測，以紙筆評量方式，請學生將問題做法及想法寫在紙上。根據旗津國小五年級學生解題表現分析，如下表：

表 1 木匠問題的評量表現

	問題 1		問題 2		理由說明	
	人數	百分比	人數	百分比		
滿分 2 或 21	5	19%	4	15%	15%	
部分分數 1 或 11	10	38%	0	0%	23%	
部分分數 12			6	23%		
部分分數 13			0	0%		
部分分數 14			0	0%		
零分 0 或 01	10	38%	1	4%	58%	
零分 02			1	4%		
零分 03			0	0%		
零分 04			9	35%		
零分 05			4	15%		
未作答	1	4%	1	4%	4%	
總計	26	100%	26	100%	100%	

「木匠」問題的整體評量表現為問題 1 滿分 19%、部分分數 39%、零分與未作答計 42%。本題為幾何題材、多重是非題，屬於 PISA 評量難度為水準 6，答對率為 20.2%。本班施測結果答對率為 19%。與 PISA 正式評量的結果相差不遠。

「木匠」問題屬於多重是非題，含四個「是/否」選項，原題目只要求寫出答案；為了能確實掌握學生解題思維，加入問題 2 請學生寫出「理由說明」之要求。問題 2 的評量表現為滿分 15%、部分分數 23%、零分與未作答 62%。



表 2 蘋果問題的評量表現

	問題 1		問題 2	
	人數	百分比	人數	百分比
滿分 21	11	42.3%	1	3.8%
部分分數 11	9	34.6%	2	7.7%
部分分數 12	0	0.0%	0	0.0%
零分 01	2	7.7%	1	3.8%
零分 02	4	15.4%	19	73.1%
未作答	0	0.0%	3	11.5%
總計	26	100%	26	100%

「蘋果」問題的整體評量表現為問題 1 滿分 42%、部分分數 35%、零分與未作答計 23%。問題 2 的評量表現為滿分 3.8%、部分分數 7.7%、零分與未作答 88.5%。

本題為數量題材，本班施測結果問題 1 滿分(7 格全對)與部分分數(答對 6 格)合計 77%，但是在問題 2 的施測結果卻是滿分與部分分數合計僅 11.5%。從學生的解題表現可以得知，就數量問題的解題方面，學生可以解決問題 1，但是，問題 2 乃是針對問題 1 所得的答案做資料的解讀與判斷。原本 PISA 的評量試題在問題 1 與 2 之中還有一個問題是：「你可以用以下的 2 個公式來計算上面提到的蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：

$$\text{蘋果樹的數量} = n^2$$

$$\text{針葉樹的數量} = 8n$$

$n$  代表蘋果樹的列數

當  $n$  為某一個數值時，蘋果樹數量會等於針葉樹數量。找出  $n$  值，並寫出你的計算方法。」

由於施測的對象是國小五年級學生，尚未學習代數教材，所以，施測時便將此問題刪去。但是筆者在施測後，重新審視此一問題時，察覺這個問題是察覺蘋果樹與針葉樹數量何者增加較快的重要思考線索，本班在施測時刪去此題雖然可以避開學生尚未學習代數表徵的問題，卻也增加了問題2的難度。

## 捌、學生「解題類型」萃取示例

### 第一題：木匠問題

學生解題類型		說明															
S08	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td><math>10+10+6+6=32</math></td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td><math>10+10+8+8 &gt; 32</math> (超過 32)</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td><math>10+10+6+6=32</math></td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td><math>(10+6) \times 2 = 32</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <p>在前面的(A)中 A-C 已完全補好，而 D 也可，而 B 是有 2 個 10 但有 2 個斜線 (斜線比直線長) 和</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$	B 設計	是 / 否	$10+10+8+8 > 32$ (超過 32)	C 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$	D 設計	是 / 否	$(10+6) \times 2 = 32$	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 透過圖像與算式可以清楚看出解題思維脈絡。</li> </ul>
	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由														
A 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$															
B 設計	是 / 否	$10+10+8+8 > 32$ (超過 32)															
C 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$															
D 設計	是 / 否	$(10+6) \times 2 = 32$															
S09	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為左右的線多出來</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為斜線比直線長</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為左右的線多出來</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>算周長</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為左右的線多出來	B 設計	是 / 否	因為斜線比直線長	C 設計	是 / 否	因為左右的線多出來	D 設計	是 / 否	算周長	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 在全班討論過後，主動補充說明為何斜線會比直線長。</li> <li>● 透過圖像可以清楚看出解題思維脈絡。</li> </ul>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為左右的線多出來															
B 設計	是 / 否	因為斜線比直線長															
C 設計	是 / 否	因為左右的線多出來															
D 設計	是 / 否	算周長															

答案正確、說明清晰

學生解題類型		說明															
答案正確、說明清晰	◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆																
	<p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <p style="text-align: center;"><math>32 - 20 = 12</math></p> <p>A設計：因為左右的線移出來，再算周長。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 在全班討論過後，補充說明不規則形狀的線段移出後，就如 D 設計的長方形周長一樣。</li> </ul>															
	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>A 的圖形可以把凹進去的地方把它拉出來算，算一算就是 32m</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>B 的圖形要先把斜的部分拉直，算一算就是 32m 所以是</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>C 的圖形也要把凹進去的部分拉出來算，也是 32m</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>D 的圖形可以直接算周長，算出來是 32m</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	A 的圖形可以把凹進去的地方把它拉出來算，算一算就是 32m	B 設計	是 / 否	B 的圖形要先把斜的部分拉直，算一算就是 32m 所以是	C 設計	是 / 否	C 的圖形也要把凹進去的部分拉出來算，也是 32m	D 設計	是 / 否	D 的圖形可以直接算周長，算出來是 32m	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 解題正確而且說理清楚。</li> </ul>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	A 的圖形可以把凹進去的地方把它拉出來算，算一算就是 32m															
B 設計	是 / 否	B 的圖形要先把斜的部分拉直，算一算就是 32m 所以是															
C 設計	是 / 否	C 的圖形也要把凹進去的部分拉出來算，也是 32m															
D 設計	是 / 否	D 的圖形可以直接算周長，算出來是 32m															
◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆																	
S11	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為如果把凹進去的線條全都推出來，就是，然後寬是 6 公尺長是 10 公尺，再用 10 公尺就可以</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為我用直尺做例子，我發現如果是平行的直線，變成其他的直線的話，它的長度也會不同</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>同上 (A)</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為寬是 6 公尺長是 10 公尺，再長 + 寬 <math>\times 2</math> 也就是 <math>(6+10) \times 2</math></td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為如果把凹進去的線條全都推出來，就是，然後寬是 6 公尺長是 10 公尺，再用 10 公尺就可以	B 設計	是 / 否	因為我用直尺做例子，我發現如果是平行的直線，變成其他的直線的話，它的長度也會不同	C 設計	是 / 否	同上 (A)	D 設計	是 / 否	因為寬是 6 公尺長是 10 公尺，再長 + 寬 $\times 2$ 也就是 $(6+10) \times 2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 解題正確而且說理清楚。</li> <li>● 善用工具 (尺) 來證明 B 設計的周長超過 32 公尺。</li> </ul>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為如果把凹進去的線條全都推出來，就是，然後寬是 6 公尺長是 10 公尺，再用 10 公尺就可以															
B 設計	是 / 否	因為我用直尺做例子，我發現如果是平行的直線，變成其他的直線的話，它的長度也會不同															
C 設計	是 / 否	同上 (A)															
D 設計	是 / 否	因為寬是 6 公尺長是 10 公尺，再長 + 寬 $\times 2$ 也就是 $(6+10) \times 2$															
S12	<p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p>																

學生解題類型		說明																
答案正確、說明有誤	S28	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 <math>10+10+6+6=32</math> 可以。 ✓ 5</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>就 是。 ? ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>是一個完整的就算能就好了。 ✓ 5</td> </tr> </tbody> </table> <p>◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <p>B 設計 否 因為是平行四邊形 高並非邊長。 ✓ 5</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 $10+10+6+6=32$ 可以。 ✓ 5	B 設計	是 / 否	就 是。 ? ✓ 2-2	C 設計	是 / 否	因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5	D 設計	是 / 否	是一個完整的就算能就好了。 ✓ 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>A、C、D 設計的周長說理正確，B 設計則是解題正確，但缺乏理由說明。</li> <li>透過討論活動後，能清楚說明圖形中的高並非邊長。</li> </ul>
	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 $10+10+6+6=32$ 可以。 ✓ 5																
B 設計	是 / 否	就 是。 ? ✓ 2-2																
C 設計	是 / 否	因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5																
D 設計	是 / 否	是一個完整的就算能就好了。 ✓ 5																
答案錯誤	S04	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為 <math>2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16</math> <math>16 \times 2 = 32</math> ✓ 2-1</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>都不能算 ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>不會算 ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>不會算 1</td> </tr> </tbody> </table> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ $16 \times 2 = 32$ ✓ 2-1	B 設計	是 / 否	都不能算 ✓ 2-2	C 設計	是 / 否	不會算 ✓ 2-2	D 設計	是 / 否	不會算 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>邊長周長概念不清，對於圖像中的資訊缺乏解讀能力。</li> </ul>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由																
A 設計	是 / 否	因為 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ $16 \times 2 = 32$ ✓ 2-1																
B 設計	是 / 否	都不能算 ✓ 2-2																
C 設計	是 / 否	不會算 ✓ 2-2																
D 設計	是 / 否	不會算 1																

### 學生解題類型

### 說明

答案錯誤

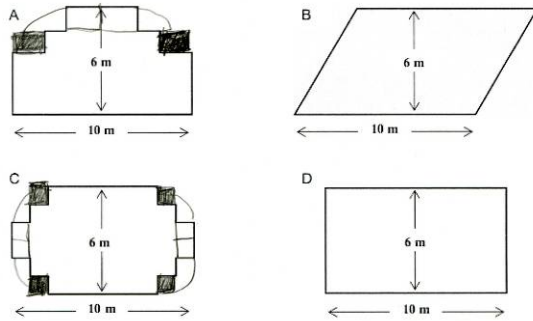
問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否可以用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	因為他有很多塊木板所以沒辦法
B 設計	是 / 否	因為B形跟D形的木板一樣而且B形沒有缺木板所以剛圍好
C 設計	是 / 否	他缺太多木板所以不好算
D 設計	是 / 否	他是完全沒有缺木板所以很好算

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

S05

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



● 從「缺很多塊」的描述，可以看出 S05 將面積與周長混淆了。

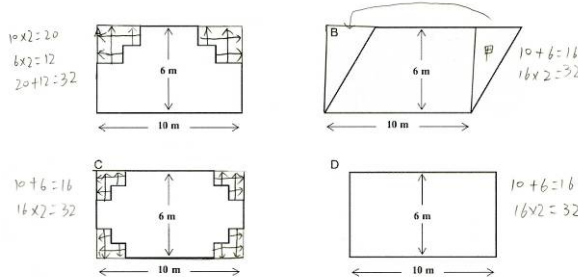
問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否可以用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	先把它凸進去的地方往上推就會形成一個長方形再算出周長。結果是 32 公尺。
B 設計	是 / 否	先把它設計圖右邊凸出來的地方畫一條線變成一個三角形。把它移到甲。再把它移到左邊少的地方。剛好補算出周長。
C 設計	是 / 否	先把它凸進去的地方推出來。它就會形成一個長方形再算出周長。結果是 32 公尺。
D 設計	是 / 否	算出周長 32 公尺。

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

S06

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



● 從 B 設計的說明「...把右邊凸出來的地方畫一條線，變成一個三角形(甲)，再把甲移到左邊少的地方...」可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。



學生解題類型		說明															
答案 錯誤	S03	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>(是) / 否</td> <td>因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / (否)</td> <td>因為 <math>6 \times 2 + 10 \times 2</math> 就會等於 32，所以可以。</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>(是) / 否</td> <td>因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>四全部加起來等於 32。</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	(是) / 否	因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。	B 設計	是 / (否)	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2$ 就會等於 32，所以可以。	C 設計	(是) / 否	因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。	D 設計	是 / 否	四全部加起來等於 32。
	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由														
A 設計	(是) / 否	因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。															
B 設計	是 / (否)	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2$ 就會等於 32，所以可以。															
C 設計	(是) / 否	因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。															
D 設計	是 / 否	四全部加起來等於 32。															
S18	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / (否)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>(是) / 否</td> <td>把它修正就會 D 是一樣的。</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / (否)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>(是) / 否</td> <td>因為 <math>6 \times 2 + 10 \times 2 = 12 + 20 = 32</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>A</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>B</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <p>C</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D</p> </div> </div> <p>1. A 是，把它剪成一半再把它合起來算算看。  2. B 否，把它變成方形之後再看看它的周長有沒有 32 公尺。  3. A 是，先把所空的凹進去的不補起來算完之後再減掉。</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / (否)		B 設計	(是) / 否	把它修正就會 D 是一樣的。	C 設計	是 / (否)		D 設計	(是) / 否	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2 = 12 + 20 = 32$	
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / (否)																
B 設計	(是) / 否	把它修正就會 D 是一樣的。															
C 設計	是 / (否)																
D 設計	(是) / 否	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2 = 12 + 20 = 32$															
		<ul style="list-style-type: none"> <li>● D 設計長方形周長解題說明正確，但對於非長方形的 A 和 C 則無法從圖像上的線索求得其周長。</li> <li>● B 設計誤將平行四邊形的 (底+高) × 2 當做周長。</li> <li>● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。</li> <li>● 事後的補充說明，面積與長度概念仍未澄清。</li> </ul>															

### 學生解題類型

### 說明

答案錯誤

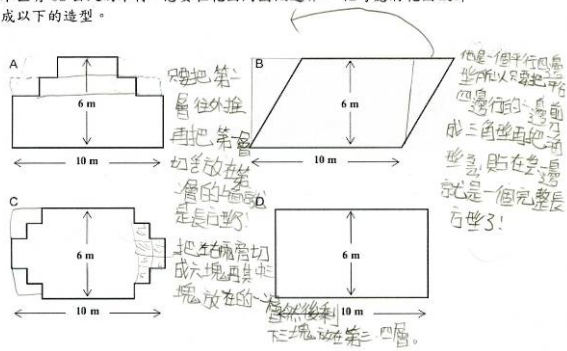
S20

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	
B 設計	是 / 否	
C 設計	是 / 否	
D 設計	是 / 否	因為 D 是長方形，所以是： $(10+6) \times 2 = 32$

#### ◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



我之前的 x 已為邊界就面積，結果經過老師的講解後我才知道原來邊界是指周長。

- 從學生事後的補充說明可以看出原先對面積與長度的基本定義是混淆的，這也是多數學生解題錯誤的主因。

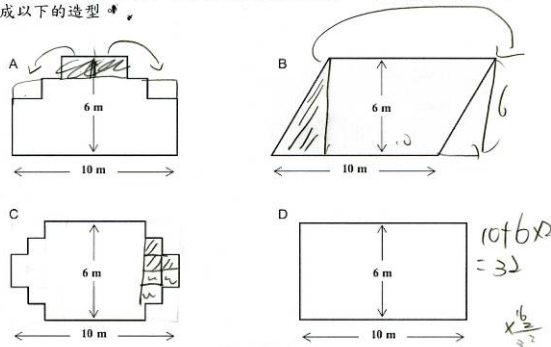
S29

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	先長寬在乘 2 就是周長
B 設計	是 / 否	先把一塊可以補在右邊的一塊剪下看能不能拼成
C 設計	是 / 否	先長寬在乘 2 就是周長
D 設計	是 / 否	可以直接算不用補也不用乘 2 就是 10+6x2=32 就可以

#### ◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



- 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。
- 雖然 A、C 設計學生的解答是正確的，但從圖象上看來，仍然是與 B 設計相同的迷思概念：將面積誤為周長。



### 學生解題類型

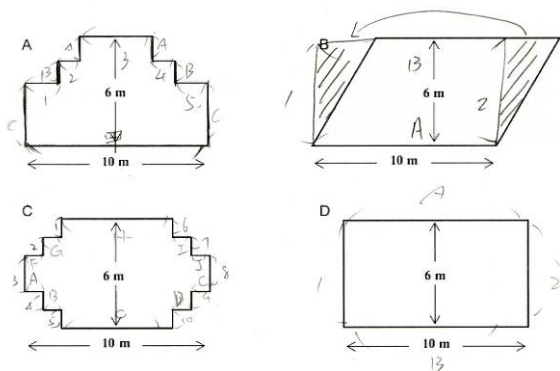
### 說明

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	左右的 A B C 加起來等於 12 而在下 A 加上 1, 2, 3, 4, 5 等於 20 把角上的搬到右邊而 1, 2 加起來等於 3 而 A B 加起來等於 20 而 12 加 20 等於 32
B 設計	是 / 否	把 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 加起來等於 55 而 A, B, C, D, E, F, G, H, I 加起來等於 20 等於 32
C 設計	是 / 否	把 1, 2 加起來等於 12 而 A, B 加起來等於 20 等於 32
D 設計	是 / 否	把 1, 2 加起來等於 12 而 A, B 加起來等於 20 等於 32

### ◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



A: 把左右邊的 A, B, C 加起來等於 12 在把上 1, 2, 3, 4, 5 加下甲等  
於 20 在把 12 加 20 等於 32。

B: 它的高是 6, 不過平行四邊形的直線一定比 6 長, 所以  
一定不可能是 32。

● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。

● 在全班討論過後，補充說明 B 設計中的高不是邊長，而邊長的斜線會比高的直線還長。

答案錯誤

S27

第二題：蘋果問題

學生解題類型		說明																		
答案正確、說明清晰	S07	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>12</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹請解釋你的想法。</p> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>A 蘋果樹 A 蘋果樹的規是配乘自己，針葉樹是8乘n數。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	12	32	5	25	40
	n	蘋果樹數	針葉樹數																	
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	12	32																		
5	25	40																		
S08	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>的數量 n? 是把自己配如到n6的話 X = +8 + 0 X = +8 + 0 會把上一個加量的2 而X只會+8 如n3-n4+6的是n2-n3+5 2 = +7 n4-n5+5 的+7+2+9...n3-n4</p> <p>◎ = n x 的 x x x = ◎ 的量。(也是3, 5, 7, 9, 11, ...) X = n x 的 x x 8 = X 的量。(也就是加8)</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 能夠自行延伸表格，將n推算到9，因而能對問題2有正確的闡述。</li> <li>● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 <math>N \times N</math> (自己乘自己) 和 <math>N \times 8</math> (8乘N)。</li> <li>● 但缺乏對蘋果數增加比較快的說明。</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 能發現蘋果樹的增加率的規則(+3、+5、+7、+9)，並且發現每次增加的數量都是前一次增加數量再+2，而針葉樹每次增加的數量是固定的都是+8。</li> <li>● 從表格中可以知道 <math>n = 5</math> 蘋果樹的數量增加9比針葉樹數量增加8多1。</li> <li>● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 <math>X \times X</math> 和 <math>X \times 8</math>。</li> </ul>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		

學生解題類型		說明																		
答案正確說明有誤	S06	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>答：針葉樹。 因為如果蘋果樹增加的比較快的話，就表示蘋果樹比較多，這樣的話針葉樹就無法種在周圍。</p> <p>答：蘋果樹。 因為蘋果樹是以平數的方式增加，針葉樹是以8的倍數增加。如果蘋果樹增加到6棵，針葉樹的數量就會增加到72棵。如此一來蘋果樹的數量就會比針葉樹多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40
	n	蘋果樹數	針葉樹數																	
	1	1	8																	
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S27	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>蘋果樹</p> <p>把原本的針葉樹變成蘋果樹，然後在把蘋果樹的周圍種針葉樹</p> <p>如果5排的話算式應是「<math>5 \times 5</math>」= 25 所以答案是25棵</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 雖然問題1中有1格算錯，但能發現種樹的規則：「把原來的針葉樹變成蘋果樹，然後再把蘋果樹的周圍種針葉樹。」</li> <li>● 能正確判斷出蘋果樹數量增加比較快。</li> </ul>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S09	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 <math>X \times X</math> 和 <math>X \times 8</math>。</li> <li>● 從表格中針葉樹的數量比蘋果樹的數量大，誤以為針葉樹增加得快，由此可知</li> </ul>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		

學生解題類型		說明																		
答案正確、說明有誤	<p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。 A. 針葉樹的數量, 蘋果樹的 <math>11 \times 1</math>、<math>12 \times 2</math>、<math>13 \times 3</math>、<math>14 \times 4</math>、<math>15 \times 5</math>, 針葉樹的 <math>11 \times 8</math>、<math>12 \times 8</math>、<math>13 \times 8</math>、<math>14 \times 8</math>、<math>15 \times 8</math>。</p>	<p>學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。</p>																		
	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>① 因為為了不要讓蘋果樹被吹倒所以農夫就種很多針葉樹 ② 也是因為針葉樹增加得很快</p> <p style="text-align: center;">A 針葉樹</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 從表格中針葉樹的數量比蘋果樹的數量大, 誤以為針葉樹增加得快, 由此可知學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。</li> </ul>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S12	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 <math>1 \times 1</math></td> <td>8 <math>8 \times 1</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4 <math>2 \times 2</math></td> <td>16 <math>8 \times 2</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9 <math>3 \times 3</math></td> <td>24 <math>8 \times 3</math></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16 <math>4 \times 4</math></td> <td>32 <math>8 \times 4</math></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25 <math>5 \times 5</math></td> <td>40 <math>8 \times 5</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>① 我覺得是針葉樹 ② 因為針葉樹要保護蘋果樹, 所以針葉樹會比較多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1 $1 \times 1$	8 $8 \times 1$	2	4 $2 \times 2$	16 $8 \times 2$	3	9 $3 \times 3$	24 $8 \times 3$	4	16 $4 \times 4$	32 $8 \times 4$	5	25 $5 \times 5$	40 $8 \times 5$	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律, 並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 <math>X \times X</math> 和 <math>X \times 8</math>。</li> <li>● 即使能將數量推算到 <math>n=9</math>, 但仍然無法判斷這些數字所代表的意義, 由此可知學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。</li> <li>● 從「因為針葉樹要保護蘋果樹, 所以針葉樹比較多。」的說明, 可以知道 S12 注意到針葉樹單邊的數量比蘋果樹單邊的數量多, 卻沒有思考到二者總量與哪一個的數量增加得比較快?</li> </ul>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1 $1 \times 1$	8 $8 \times 1$																		
2	4 $2 \times 2$	16 $8 \times 2$																		
3	9 $3 \times 3$	24 $8 \times 3$																		
4	16 $4 \times 4$	32 $8 \times 4$																		
5	25 $5 \times 5$	40 $8 \times 5$																		

學生解題類型		說明																		
答案正確、說明有誤	S26	<p>◆◆◆◆◆ 蘋果 ◆◆◆◆◆</p> <p>農夫將蘋果樹種在正方形的果園。為了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。</p> <p>在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數(n)，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：</p> <p>n=1    n=2    n=3    n=4    h=5</p> <p>x = 針葉樹 ● = 蘋果樹</p> <p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td><math>4 \times 4 = 16</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td><math>9 \times 2 + 6 = 24</math></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td><math>16 \times 2 = 32</math></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td><math>25 \times 1 + 15 = 40</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>① 針葉樹</p> <p>② 因為問題1我在做答時發現了兩數都有在變化而針葉樹的變化愈變愈多，而蘋果樹的數量都是相差8！</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	$4 \times 4 = 16$	3	9	$9 \times 2 + 6 = 24$	4	16	$16 \times 2 = 32$	5	25	$25 \times 1 + 15 = 40$
	n	蘋果樹數	針葉樹數																	
1	1	8																		
2	4	$4 \times 4 = 16$																		
3	9	$9 \times 2 + 6 = 24$																		
4	16	$16 \times 2 = 32$																		
5	25	$25 \times 1 + 15 = 40$																		
答案錯誤	S18	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>針葉樹的數量</p> <p>因為針葉樹是在保護蘋果樹，所以針葉樹的數量當然會比較多。下圖</p> <p><math>x=30</math> <math>y=25</math> <math>30-25=5</math> 2個相差5個</p> <p>A:5是25，把針葉樹加8就OK了。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	50
	n	蘋果樹數	針葉樹數																	
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	50																		
S19	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<p>● 能察覺針葉樹數量的變化規律「針葉樹的數量都是相差8」，也能描述不同n值蘋果樹與針葉樹的數量關係，<math>n=2</math>，蘋果樹<math>(a)=4</math>，針葉樹<math>16=4 \times 4</math>；<math>n=3</math>……但無法從這些資料判斷出何者增加比較快。</p> <p>● 受限於「針葉樹在外圍保護蘋果樹」，知道針葉樹種植的單邊數量比蘋果數的單邊數量多，與S12相同，詳見S12說明。</p> <p>● 能察覺針葉樹的變化規律是「8的倍數」，但對於何者數量增加較快，則無法判斷。其原因詳見S12。</p>
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		

學生解題類型		說明																	
答案錯誤		<p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>1. 針葉樹 2.</p> <p>2. 因為針葉樹的數量1到4棵都是8的倍數, 所以針葉樹的列數比蘋果樹的列數多。</p>																	
	S10	<p>問題1: 請完成下表的空格 <math>n=2 \times</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>12</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><del>18</del> 15</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>A<sup>①</sup> 針葉樹 ② 針葉樹 1</p> <p>解釋: 如果是種一棵蘋果樹四周都有針葉樹, 因此針葉樹比蘋果多。</p> <p>● 詳見 S12 說明。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	12	32	5	<del>18</del> 15
n	蘋果樹數	針葉樹數																	
1	1	8																	
2	4	16																	
3	9	24																	
4	12	32																	
5	<del>18</del> 15	40																	

## 玖、教學省思

筆者第一次看到 PISA 試題, 乍看之下覺得試題很難, 因為這是一種與傳統以學科知識為中心的評量方式完全不同的評量。試題的敘寫方式乍看繁瑣冗長, 其中的開放性問題是正規教育中少見的問題題型。

為了這次評量仔細的看了試題樣本, 發覺題目好像又沒有預期中的那麼困難。解決這些問題所需要的數學知識不見得是非常高深的數學知識; 但是, 除了這些數學知識之外, 困難點在於是否具備運用課堂中所習得的數學知識來解決問題的數學能力素養。

施測之後從學生的解題表現發現本班學生僅 15%(4 人) 在木匠問題中的解題說理正確且清楚。而錯誤的說理大致上可分為兩類: 一是誤將等積異形的面積相同當做周長也相同, 也就是面積與周長的意義

混淆了。另一類是誤將平行四邊形的高當作是斜邊。在施測後針對學生的迷思概念進行討論活動，有不少學生因此而得以澄清其迷思概念，但仍有幾個學生對於面積與周長的概念仍然模糊。

整體而言，筆者發覺適當選用 PISA 試題讓學生練習解決非例行性問題，並增加解題說明的訓練，對於學生的解題能力與思維活動說明都有很大的幫助。教師更可從分析學生的解題表現中發現學生的迷思概念，進而能透過補救教學討論活動去澄清學生的迷思概念。