

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫
數學學習領域領航教師第五期第一階段
精進數學教學與命題工作坊成果彙編

目錄

1. 計畫	1
2. 運用 PISA 評量試題於國小六年級之數學解題初探	3
3. 國小學童的 PISA 試題初體驗——以六年級為例	27
4. 數學 PISA 試題評量——以速率為例	37
5. 數學 PISA 試題評量——以五年級為例	47
6. 數學 QUASAR 紙筆認知評量——以五年級為例	73
7. 數學 QUASAR 紙筆認知評量——以等腰三角形為例	81
8. 四上數學領域期末定期考查卷之試題分析	89
9. 二年級數學期末考延後測試題與評量分析	95
10. 一年級上學期期中數學評量試卷及延後測之學生學習成就分析	107
11. 一年級數學月考延後測試題與評量分析	115
12. 問卷回饋表統計	121
13. 研習花絮	123

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫

數學學習領域領航教師第五期第一階段

精進數學教學與命題工作坊計畫

壹、依據：

- 一、教育部補助辦理精進教學要點。
- 二、高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度辦理精進教學工作計畫。
- 三、教育部 99 學年度「國民中小學九年一貫推動工作－課程與教學輔導組－數學學習領域輔導群」實施計畫。

貳、目的：

- 一、引導教師探討數學教學及命題關鍵，增進教師對命題技術與內容之瞭解。
- 二、引導教師賞析國科會計畫研發之評量試題，提升教師教學及命題實力。
- 三、彙整優質數學命題設計作品，提供數學教師教學參考。

參、研習內容：

- 一、數學教學及命題關鍵探討與實作。
- 二、國科會計畫研發之評量試題賞析。

肆、指導單位：教育部

伍、主辦單位：高雄市政府教育局、國民中小學九年一貫推動工作－課程與教學輔導組－數學學習領域輔導群。

陸、承辦單位：高雄市國民教育輔導團數學學習領域

柒、協辦單位：高雄市明義國小

捌、研習日期：1/24、1/25、1/26(全天)，3/30(週三下午)，共 7 個半天。

玖、研習地點：高雄市國教輔導團 A 棟 2 樓 A201 會議室

(位於龍華國小舊校區內，高雄市鼓山區大順一路 570 號)。

拾、參與對象：

- 一、國小數學領域正式教師，預計錄取 40 名。
- 二、錄取優先順位如下：
 1. 曾參與過一期或兩期領航教師培訓課程者。
 2. 各校數學領域召集人(依報名先後順序)。
 3. 任教數學課程之一般教師(依報名先後順序)。
- 三、參與成員 1-2 人一組，產出一份「數學命題設計」作品。

拾壹、研習課程表：如二-5-2-1。

拾貳、報名方式：於 100 年 1 月 22 日前，至「全國教師在職進修網」上網報名，網址：<http://inservice.edu.tw/>。課程名稱：「領航教師第五期第一階段精進數學教學與命題工作坊」研習班。

拾參、研習時數：全程參與研習者核予 21 小時研習時數，公假課務自理。

拾肆、研習經費：如二-5-2-2。

拾伍、獎勵：凡累計完成三階段數學領航教師培訓者，將頒發數學領航教師證書，參與本研習活動之相關工作人員，於研習結束後依規定敘獎。

拾陸、本計畫陳報教育局核准後實施，修正時亦同。

二-5-2-1

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫

數學學習領域領航教師第五期第一階段

精進數學教學與命題工作坊

課程表

日期 時間	1/24	1/25	1/26	3/30
9:10~12:00	數學教學與命 題關鍵探討	數學教學與命 題關鍵探討	國科會計畫研 發之評量試題 賞析	無
	台北教育大學 張英傑教授	台北教育大學 張英傑教授	台北教育大學 張英傑教授	
12:00~13:30	休息（用餐）			
13:30~16:30	數學命題 實作與探討	數學命題 實作與探討	數學命題 實作與探討	數學評量 實施與探討
	台北教育大學 張英傑教授	台北教育大學 張英傑教授	台北教育大學 張英傑教授	台北教育大學 張英傑教授
地 點	C201 演示教室			

運用 PISA 評量試題於國小六年級之數學解題初探

高雄市國教輔導團 洪雪芬

壹、前言

PISA (the Programme for International Student Assessment) 是一項強調基礎素養與終身學習能力的國際性標準化評量，評量對象為 15 歲學生，目的是評量學生在數學、科學和閱讀方面的素養、能力及面對成人生活的準備度 (洪碧霞, 2010)。PISA 從 2000 年開始實施，每三年舉辦一次，台灣學生於 2006 年首次參與 PISA 國際學生能力評量，數學表現相當優異，在參加的 57 個國家(地區)中，名列第一；然而，2009 年數學名次卻在 65 個國家(地區)中，排行第五；雖然我們都知道，若是以成績來看，台灣學生在此兩次評量的數學表現，並沒有顯著差異，然而，此評量結果已引起數學教育界廣泛的關注。

今年(2011 年)教育部和國科會積極合作辦理「數學素養的評量設計」教師工作坊，分台北、宜蘭、新竹、台中、台南及高雄等六區進行，目的是引導國中數學教師了解 PISA「評量數學素養」的教育趨勢，進而培養國中數學教師設計「評量數學素養」試題的能力。既然，PISA 評量對象為 15 歲學生，那麼，是否只要國中數學教師了解 PISA 評量趨勢即可？不，筆者認為以培養「數學素養」的觀點來看，應該從國小開始做好扎根工作。

基於此，筆者仔細分析 PISA 樣本試題，發現若是以課程綱要之數學能力指標來對照的話，幾乎有半數以上的題目是國小學生能力所及的；然而，由於 PISA 強調評量數學素養，因此題目的內容呈現方式和解題要求，大多是國小學生所不熟悉的，也就是說幾乎都是非例行性的問題。因此，當國小學生遇見 PISA 評量試題，其數學解題與說理能力為何，成為我們關注的第一個問題。

PISA 評量的每一個題目都分別提供評分標準，而其標準是因應 15 歲學生而設的，因此，運用 PISA 樣本試題於 12 歲的國小學生，若是以 PISA 提供評分標準來評分，其目的應僅止於提供教師了解學生表現，作為教學改進參考。因此，在以瞭解學生的數學迷思概念及解題說理表現為前提之下，我們採用 QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) 紙筆認知評量的評分規準來評分。QUASAR 紙筆認知評量強調認知過程包含理解數學題目、察覺數學關係、組織訊息、系統化闡述、評價答案的合理性、推論結果、證明答案和溝通數學想法；表徵類型包含文字、算式、圖形和圖表等。QUASAR 紙筆認知評量規準注重評量學生在數學解題、推理和溝通方面的表現 (Anthony, N. 1989, Lane, S. & Silver, E. A. 1995.)，與 PISA 評量強調數學素養的理念相當吻合。當然，如何從學生的解題表現，澄清學生的數學迷思概念，提升學生的數學解題與說理能力，則是我們關注的第二個問題。

基於上述之問題，本研究的目的如下：一、瞭解學生在 PISA 樣本試題之數、量、形三種題型中，數學解題與說理的表現。二、探討如何從學生的解題表現，澄清學生的數學迷思概念，提升學生的數學解題與說理能力。

貳、文獻探討

一、PISA 評量

根據 PISA 國家研究中心網站 (<http://pisa.nutn.edu.tw/>) 所提供的 PISA 相關資料顯示，PISA (the Programme for International Student Assessment) 學生能力國際評量計畫，是由 OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) 經濟合作暨發展組織自 1997 年起籌劃，2000 年正式推出的一項國際學生能力評量計畫。參與國家 (地區) 數量從 2000 年 43 個，2003 年 41 個，2006 年 56 個，到 2009 年 68 個，逐次遞增；也就是說，目前已有超過 68 個 OECD 會員國與夥伴國 (地區) 參與計畫，約涵蓋了 87% 的世界經濟體。

PISA 評量對象為 15 歲學生，目的是評量學生在數學、科學和閱讀方面的素養、能力及面對成人生活的準備度 (洪碧霞, 2010)。之所以選擇十五歲學生，是因為多數 OECD 國家這個年齡的學生正處於義務教育完備的階段，此時進行評量可以了解學生接受約十年教育的成果。每次 PISA 評量，各國約有 150 所學校，4500-10000 名學生受測，這些學生係選自公私立學校的隨機樣本，且是依據年齡 (介於 15 歲 3 個月至 16 歲 2 個月的學生) 而非以年級做選擇。以台灣的學制來說，這個年齡的學生大約是就讀國三、專一和高一。

PISA 評量包含閱讀、數學和科學三個向度，每次 PISA 評量會以一個學科領域為主，其他兩個學科領域為輔；為主的學科領域施測時間大約佔全部施測時間的三分之二，週期排列如下：2000 年閱讀為主科，科學和數學為輔；2003 年數學為主科，閱讀和科學為輔；2006 年科學為主科，閱讀和數學為輔；2009 年又回到閱讀主科，科學和數學為輔；2012 年則是數學為主科，閱讀和科學為輔，而且 2012 年，還要另外加測線上問題解決能力 (Problem Solving)。

關於 PISA 評量之閱讀，數學和科學的素養程度，說明如下：(1) 閱讀：所謂閱讀的素養意旨，產生閱讀行為的各種情境。情境架構概括為：個人、教育、職業、公眾。由於題材取自生活中廣泛的文字訊息，文本的形式相當多元，如：散文、敘事、論述、廣告文宣、官方文件或聲明、故事寓言、報告表單等。評量的重點在於對文本訊息的擷取、發展解釋、省思與評鑑文本內容、形式與特色。

(2) 數學：主要定義包含四大概念；數量、空間與形狀、改變與關係、不確定性。所須的技巧如；數學語言的理解、建模、解題假設執行。評量架構則定義為五種情境；個人的、教育的、職業的、公眾的、科學的。題材融入了現在國民都會碰到的全球暖化、溫室效應、人口成長、浮油與海洋、酸雨或運動常識等課題，生活化的課題都是可涵蓋的範圍。(3) 科學：主要概念包含物理、化學、

生物、科學及地球與太空科學等。應答能力上，要求受測學生須解釋及預測科學現象、提供假設、使用科學證據並瞭解科學調查，命題領域擴及生命與健康科學、地球與環境科學及科技科學。

PISA 評量強調的知識技能包括；溝通、適應性、學習策略、彈性、時間管理、自我信念、問題解決、資訊技巧等。發展這些跨課程的技能需要一個廣泛跨課程的評量。因此，試題的設計著重在應用及情境擬態，並不圈限於課程內容，受測學生須先把資訊理解並將統整、評鑑、省思能力靈活運用，自行建構問題情境的答案。而評量的焦點是學生能否使用習得知識技能，面對真實世界的挑戰而非僅是學校課程的精熟程度。因此，PISA 的重點目標是提供一個穩定的參考點用以監控教育系統的革新，參與國家可以透過比較分析瞭解到自己國家的學生在各項素養相對的優勢與劣勢，作為教育改進的參考。

二、QUASAR 紙筆認知評量

QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) 教學評量研究計畫為美國匹茲堡大學為提升經濟不利地區高中學生的數學思考及推理能力所進行的一個評量計畫。QUASAR 計畫使用種種評量來評估學生是否達到推理、解題、溝通之數學教學目標，包括易於大團體實施的學生紙筆認知評量；易於班級教學實施的教學導向作業，像是合作學習、個別操作的評量；以及針對重要態度、信念和性向的非認知評量。其中最具特色的是 QUASAR 紙筆認知評量工具的發展，評量分為數學內容、認知過程、表徵類型與任務背景等四個向度；數學內容包含數、計算、測量、機率和統計、幾何、代數、估計、模式；認知過程包含理解數學題目、察覺數學關係、組織訊息、系統化闡述、評價答案的合理性、推論結果、證明答案和溝通數學想法；表徵類型包含文字、算式、圖形和圖表等；任務背景則融入題目設計中 (Anthony, N. 1989, Lane, S. & Silver, E. A. 1995.)。QUASAR 紙筆認知評量的評分規準如下：

表 2-1 QUASAR 紙筆認知評量的評分規準

Level	評 分 規 準
Level 5	答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。
Level 4	答案正確，計算過程和文字說明或圖形說明正確，但不夠完整。
Level 3	答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明。
Level 2	答案不正確，但包含正確的數學推理；或只有一正確答案而無計算過程。
Level 1	嘗試回答

QUASAR 紙筆認知評量注重評量學生在數學解題、推理和溝通方面的表現，與 PISA 評量數學素養的觀點相當吻合。

參、研究設計

一、研究對象

本研究實施對象為高雄市博愛國小六年級 31 位學生。

二、評量內容

本研究評量內容有四題，涵蓋幾何、數量、統計三個主題，題目篩選以「學生易產生迷思概念」、「能培養學生讀題能力」及「能提升學生說理能力」的題目為原則。第一題題目特色：內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，評量重點是空間能力與迷思概念，屬於幾何題材。第二題題目特色：內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的，評量重點是處理複雜資訊的能力，屬於數量題材。第三、四題題目特色：內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的，評量重點是解讀統計圖與說理的能力，屬於統計題材。本評量之第一題，題目屬於填充題，含四個問題，原題目只要求寫出答案；為了能確實掌握學生解題思維，在第一題的「問題 4」和 second 題加入「請寫出你的想法」之要求。題目內容如下：

【第一題】積木問題

蘇珊想要利用下圖的小立方體來做出積木模型：



小立方體

蘇珊有許多像上面這樣的小立方體，她利用膠水將許多的小立方體黏起來成為積木模型。首先，蘇珊拿了 8 個小立方體做出圖A的積木模型。

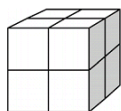


圖 A

然後，蘇珊再做出了圖B和圖C的積木模型。

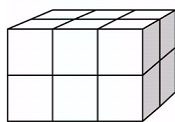


圖 B

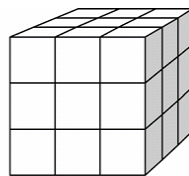


圖 C

問題 1：蘇珊需要拿多少個小立方體才能做出圖B的積木模型？答：.....個

問題 2：蘇珊需要拿多少個小立方體才能做成圖C的積木模型？答：.....個

問題 3：蘇珊想到可以用比實際還要少的小立方體來作出圖C的積木模型。

她想用膠水黏出一個看起來像圖C，但是內部是中空的積木模型。

問蘇珊需要多少個小立方體來做出這個看起來像圖C，

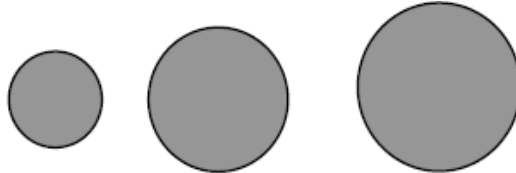
但是內部卻是中空的積木模型。答：.....個

問題 4：現在，蘇珊想要做出一個6個小立方體長、5個小立方體寬、4個小立方體高的積木模型。假如她想要用最少的小立方體，並在內部留出可能最大的空心空間。蘇珊需要最少幾個小立方體？答：.....個

◎請寫出你的想法。

【第二題】硬幣問題

你被要求設計出一套新的硬幣。所有硬幣都是圓形，且顏色都是銀色，但是有不同的直徑。



研究者發現了一個理想的硬幣系統，其符合以下要求：

- 硬幣直徑不可小於 15 毫米，且不可大於 45 毫米
- 每個硬幣的下一個硬幣的直徑必須比它大至少 30%。
- 鑄造的機械只能生產出直徑為整數的硬幣(如：可以製造 17 毫米，但無法製造 17.3 毫米)。

問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。

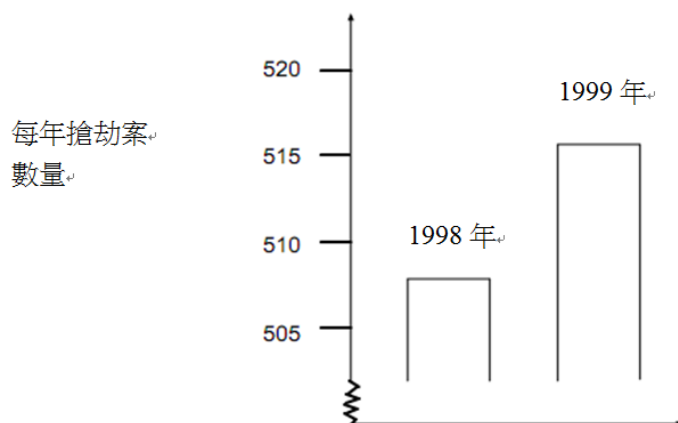
從一枚 15 毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？

◎請說明你的想法。

【第三題】搶劫問題

電視主播呈現了下圖並報導：

「從圖表顯示，從 1998 年到 1999 年搶劫案數量有巨幅的上升」。

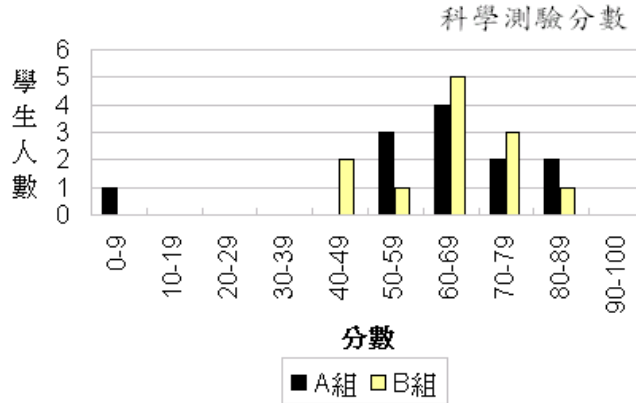


你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？

請寫出一個理由來支持你的答案。

【第四題】測驗分數

下圖是兩組學生參加科學測驗的結果，這兩組學生分別稱為 A 組和 B 組。A 組的平均分數是 62.0 分，B 組的平均分數是 64.5 分。當學生得分為 50 分或以上時他們便通過這個測驗。



由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。

三、評分工具

本研究以 PISA 評量所提供的評分標準來評分，以掌握學生的數學數養表現之外，主要以 QUASAR 紙筆認知評量的五個 LEVEL 評分規準來評分，以了解學生的解題與說理的能力。說明如下

(一) PISA 評量標準

表 3-1 第一題「積木」之 PISA 評量標準

問題 1 評量標準	問題 2 評量標準	問題 3 評量標準	問題 4 評量標準
代號 1：12 個	代號 1：27 個	代號 1：26 個	代號 1：96 個
代號 0：其他答案	代號 0：其他答案	代號 0：其他答案	代號 0：其他答案
代號 9：沒有作答	代號 9：沒有作答	代號 9：沒有作答	代號 9：沒有作答

表 3-2 第二題「硬幣」之 PISA 評量標準

評量標準
代號 1：15-20-26-34-45。可能的作法中包含畫出正確的硬幣直徑來呈現答案，這也要評為代號 1。
代號 8：給一組能滿足 3 個要求的硬幣直徑，但不是能達到最多硬幣數的組合，如 15-21-29-39，或 15-30-45 或 前 3 個直徑正確，但後 2 個錯誤(15-20-26-) 或 前 4 個直徑正確，但最後 1 個錯誤(15-20-26-34-)
代號 0：其他答案
代號 9：沒有作答

表 3-3 第三題「搶劫」之 PISA 評量標準

評量標準	
<p>注意：以下代號中，答案「否」包括所有認為「該詮釋是 不合理的」的句子，而答案「是」則包括所有認為「該詮釋是合理的」的句子。請不要單憑「是」或「否」來計分，而應看看答案解釋是否合理。</p>	
<p>滿分</p> <p>代號 21：不，不合理。指出我們看到的只是整個圖表的其中一小部分。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 不合理，須顯示整個圖表。 • 我不認為那是合理的詮釋，因為如果顯示全圖的話，便能看到搶劫案的數目只是輕微上升。 • 不合理，因為他只用了圖表上方的小部分。如果看到全圖由0到520的情況，便知道上升的幅度不是那麼大。 • 不，那只是因為該圖表讓人覺得數字巨幅上升。看數字增加並不多。 <p>代號 22：不，不合理。用比率或百分比的數字作論據，論點正確。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 不，不合理。與總數500比較，10不是一個巨幅的增加。 • 不，不合理。計算百分比，約只有2%的增加。 • 不，多了8宗搶劫案，即上升了1.5%。我認為那不是很多！ • 不，今年只多了8或9宗，與507宗比較，那不是很大的數字。 <p>代號 23：要有趨勢的數據資料才可作出判斷。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 我們不能說增加是否巨幅。若1997年的搶劫案數目與1998年的相同，那麼我們可以說1999年有巨幅增加。 • 有多「巨幅」，我們無從得知。因為至少需要有兩個改變，才可判別哪個大，哪個小。 	
<p>部份分數</p> <p>代號 11：不，不合理，但欠缺詳細解釋。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 只有討論搶劫案的實際增加數字，但沒有將它與總數比較。 • 不合理。搶劫案數目大約增加了10宗。用「巨幅」一詞去形容搶劫案數目增加的真實情況不正確。搶劫案數目只大約增加了10宗，我不會稱之為「巨幅」。 • 由508至515不是一個大增加。 • 不，因為8或9不是一個大數目。 • 有點不合理。由508 至515 是有增加，但不是巨幅的增加。 <p>注 意：由於圖表的比例尺不是太清楚，因此如果搶劫案增加的數字在5至15之間，可以接受。</p> <p>代號 12：不，不合理。方法正確但有輕微計算錯誤。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 方法和結論皆正確，但計算出來的百分比是0.03%。 	
<p>零分</p> <p>代號 01：不。表示不合理，但沒有提供解釋、沒有充分解釋或解釋不正確。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 不，我不同意。 • 主播不應用「巨幅」這個字眼。 • 不，這是不合理的。主播（記者）經常喜歡誇大。 <p>代號 02：是。基於圖表的形狀，因而指出搶劫案數字雙倍增加。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 是，圖形的高度雙倍增加。 • 是，搶劫案數字差不多雙倍增加。 <p>代號 03：是。沒有提供解釋，或提供代號02以外的解釋。</p> <p>代號 04：其他答案 代號 99：沒有作答</p>	

表 3-4 第四題「測驗分數」之 PISA 評量標準

評量標準	
代號1：	列出一個恰當的論點。恰當的論點須提及合格人數、極端值造成的影響、或最高分的學生人數。 <ul style="list-style-type: none"> • A 組學生的合格人數較 B 組多。 • 如果你忽略 A 組成績最差的學生，A 組學生比 B 組學生做得較好。 • A 組取得 80 分或以上的學生人數較 B 組多。
代號 0：	其他答案，包括沒有列出數學上的原因，或列出錯誤的數學原因、或只簡述成績的差別，但卻沒有恰當的論點指出 B 組的學生不一定做得較好。 <ul style="list-style-type: none"> • 在科學的表現上，A 組的學生通常比 B 組的學生好。這次測驗的結果只是巧合。 • 因為 B 組學生最高分和最低分的差異較 A 組學生小。 • A 組學生在 80-89 分的範圍及 50-59 分的範圍取得較好的成績。 • A 組的四分位差較 B 組大。
代號 9：	沒有作答

(二) QUASAR 紙筆認知評量評分規準

除了以 PISA 提供的評分規準來評分之外，第一題的問題 4、第二、三、四題均再運用 QUASAR 紙筆認知評量評分規準來評分，筆者根據題目的屬性及解題要求，將 QUASAR 紙筆認知評量評分規準原版小修如下：

表 3-5 第一題問題 4 和第二題的 QUASAR 紙筆認知評量評分規準

Level	QUASAR 評分規準
Level 5	答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。
Level 4	答案正確，計算過程和文字說明或圖形說明正確，但不夠完整。
Level 3	1. 答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明，或文字圖形說明錯誤。 2. 答案正確，文字或圖形說明正確，但無計算過程，或計算過程錯誤。
Level 2	答案不正確，但包含正確的數學推理；或只有一正確答案而無計算過程。
Level 1	嘗試回答。

表 3-6 第三題和第四題的 QUASAR 紙筆認知評量評分規準

Level	QUASAR 評分規準
Level 5	答案正確，文字說明正確完整。
Level 4	答案正確，文字說明正確，但不夠完整。
Level 3	答案正確，但無文字說明，或文字說明錯誤。
Level 2	答案不正確，但包含正確的數學推理。
Level 1	嘗試回答。

四、實施流程

本次評量涵蓋三類題型，四個題目，第一題題目特色是內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，因此教師不做任何說明，直接施測；第二題題目特色是內容

敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的，因此實施方式為先讓學生自行閱讀題目，以試探學生讀題能力，由於五分鐘後只有 3 位學生看懂題目，再過三分鐘還是只有 7 位學生看懂題目，於是由教師進行題目導讀，再施測；第三、四題題目特色是內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的，由於，題目屬於統計範疇，因此教師先講幾個有關統計的笑話，再讓學生自行閱讀題目及解題。實施流程如下：

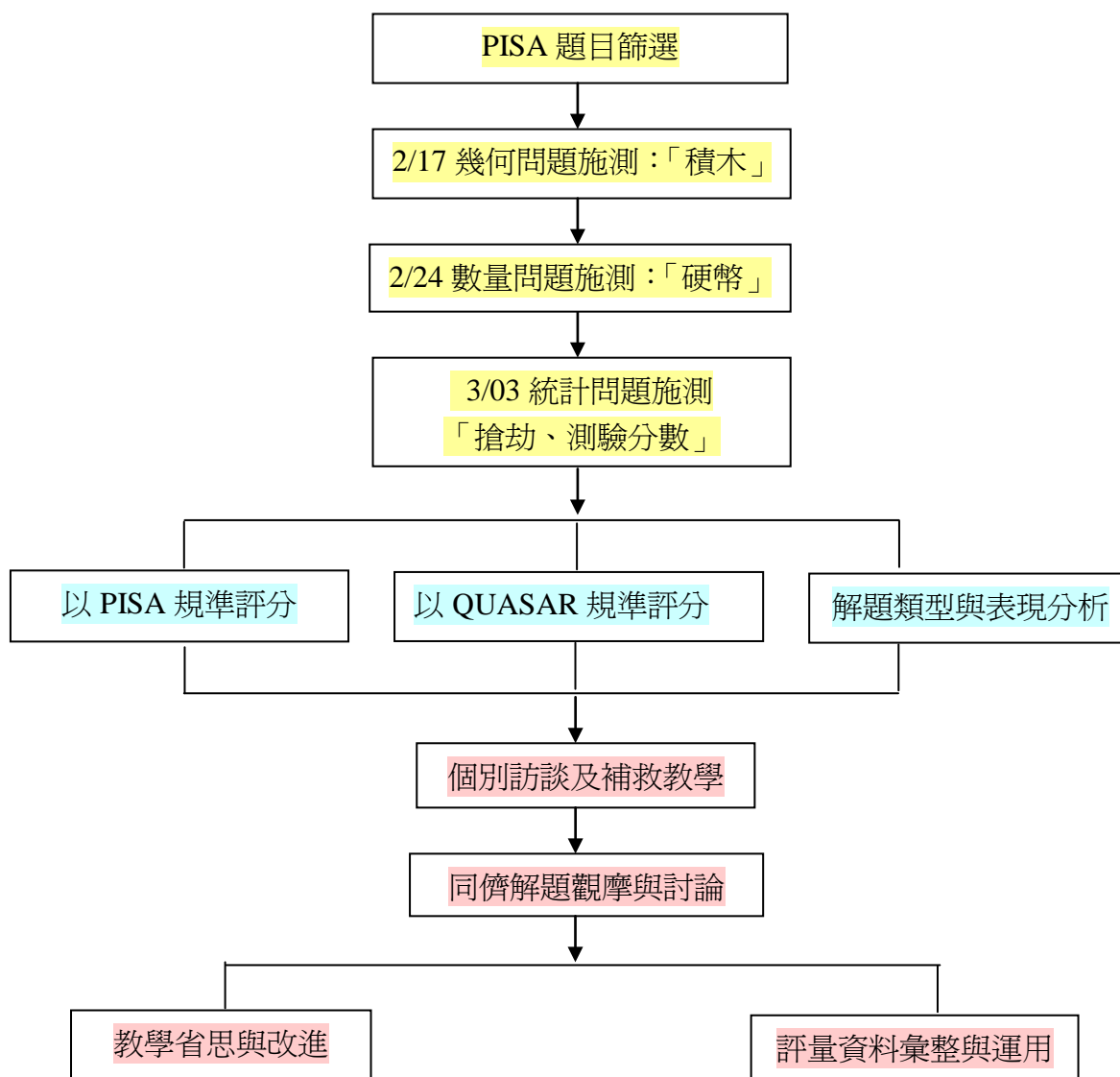


圖 3-1 「運用 PISA 評量試題於國小六年級之數學解題初探」之實施流程

五、補救教學與深化學習

本研究在評量之後，依據題目性質和學生表現進行補救教學與深化學習，第一、二題需要計算、解題和說理，因此，先採用個別訪談進行補救教學，澄清學生的數學迷思概念；再透過解題觀摩討論，進行深化學習。第三、四題僅要求學生評析與說理，學生表現落差較大，因此直接透過解題觀摩討論，進行深化學習，提升學生說理的能力。

肆、學生之解題表現分析

一、「積木」問題之解題表現分析

(一) 以 PISA 之評分標準來評分，學生之解題表現分析

題號	代號 1 (滿分)		代號 0 (零分)		代號 9 (沒作答)	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
問題 1	31 人	100%	0 人	0%	0 人	0%
問題 2	31 人	100%	0 人	0%	0 人	0%
問題 3	27 人	87%	4 人	13%	0 人	0%
問題 4	24 人	77%	7 人	23%	0 人	0%

「積木」問題之整體評量表現為問題 1、問題 2 滿分 100%；問題 3 滿分 87%，零分 13%；問題 4 滿分 77%，零分 23%。本題為幾何題材，內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，因此，有四分之三以上的學生達到 PISA 的要求水準。

(二) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題表現分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數				
			5	4	3	2	1
答案正確	類型一	算式正確，圖形正確。 $6 \times 5 \times 4 = 120$ $(6-2) \times (5-2) \times (4-2) = 24$ $120-24 = 96$ 答：96 個	14				
	類型二	算式正確，圖形正確。 上下： $5 \times 6 \times 2 = 60$ 中： $2 \times 6 \times 2 + 2 \times 3 \times 2 = 36$ 合： $60 + 36 = 96$ 答：96 個	1				
	類型三	算式正確，文字說明正確。 全部 $6 \times 5 \times 4 = 120$ ， 中空 $4 \times 3 \times 2 = 24$ ， $120 - 24 = 96$ 答：96 個	1				
	類型四	算式正確，沒有圖形。 $6 \times 5 \times 4 = 120$ ， $4 \times 3 \times 2 = 24$ $120 - 24 = 96$ 答：96 個			1		
	類型五	圖形正確，沒有算式。			3		
	類型六	算式正確，圖形錯誤。 $6 \times 5 \times 4 = 120$ ， $120 - 24 = 96$ 答：96 個			1		
	類型七	算式格式錯誤，圖形錯誤。 $6 \times 5 \times 4 - 6 - 2 \times 5 - 2 \times 4 - 2 = 120 - 24 = 96$ 答：96 個				1	
	類型八	圖形錯誤，沒有算式。答：96 個				2	
答案錯誤	類型一	圖形正確，算式錯誤。 $6 \times 5 \times 2 = 60$ ， $6 \times 4 \times 2 = 48$ $5 \times 4 \times 2 = 40$ ， $60 + 48 + 40 = 148$ 答：148 個				2	
	類型二	圖形正確，沒有算式。答：72 個				1	
	類型三	圖形錯誤，算式錯誤。 $6 \times 5 \times 4 = 120$ ， $4 \times 3 = 12$ $120 - 12 = 108$ 答：108 個					1
	類型四	圖形錯誤，算式錯誤。					3
計	人數		16	0	5	6	4

由上表之解題類型分析，得知達到 Level 5 有 16 位，超過全班人數二分之一；答案正確，達到 Level 3 和 2 的 11 位學生，需澄清其迷思概念，並加強解題說理能力；答案錯誤，成績為 Level 1 的 4 位學生，需個別指導以建立其數學概念。筆者認為找出 Level 3 和 2 的 11 位學生，以增強其解題說理能力，是實施 QUASAR 紙筆認知評量最大的價值所在。

(三) 以 QUASAR 紙筆認知評量評分規準來評分，學生之解題示例萃取

Level 5 答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。	
<p>問題 4：現在，蘇德想要做出一個 6 個小立方體長、5 個小立方體寬、4 個小立方體高的積木模型。假如她想要用最少的小立方體，並在內部留出可能最大的空心空間。蘇德需要最少幾個小立方體？</p> <p>◎請寫出你的想法。</p> <p>(由圖得知，拿掉外面的木框，有 12 個小立方體)</p> <p>(中)由圖得知有 2 層</p> <p> $6 \times 5 \times 4 = 120$ $4 \times 3 \times 2 = 24$ $120 - 24 = 96$ </p> <p>A: 96 個</p>	<p>◎請寫出你的想法。</p> <p> $6 \times 5 \times 4 = 120$ $120 - 24 = 96$ </p> <p> 中空: $6-2=4$ $5-2=3$ $4-2=2$ $4 \times 3 \times 2 = 24$ </p> <p>A: 96 個</p>
<p> $6 \times 5 \times 4 = 120$ $2 \times 4 \times 3 = 24$ $120 - 24 = 96$ </p> <p>A: 96 個</p>	<p> $6 \times 5 \times 4 = 120$ $(6-2) \times (5-2) \times (4-2) = 24$ $120 - 24 = 96$ </p> <p>A: 96 個</p>
Level 3 1. 答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明，或文字圖形說明錯誤。 2. 答案正確，文字或圖形說明正確，但無計算過程，或計算過程錯誤。	
<p> $6 \times 4 \times 5 = 120$ $120 - 24 = 96$ </p> <p>A: 96 個</p>	<p>A: 96 個</p>
Level 2 答案不正確，但包含正確的數學推理；或只有一正確答案而無計算過程。	Level 1 嘗試回答。
<p>◎請寫出你的想法。</p> <p> $6 \times 4 \times 2 = 48$ $6 \times 5 \times 2 = 60$ $5 \times 4 \times 2 = 40$ $48 + 60 + 40 = 148$ </p> <p>A: 148 個</p>	<p>◎請寫出你的想法。</p> <p> $6 \times 5 \times 4 = 120$ $6 \times 5 = 30$ $120 - 30 = 90$ </p> <p>A: 90 個小立方體</p>

學生解題示例萃取，可提供學生解題觀摩的機會，也可提供教師教學改進之參考。

二、「硬幣」問題之解題表現分析

(一) 以 PISA 之評分標準來評分，學生之解題表現分析

代號 1 (滿分)		代號 8		代號 0 (零分)		代號 9 (沒作答)	
人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
15 人	48%	12 人	39%	4 人	13%	0 人	0%

「硬幣」問題之整體評量表現為滿分 48%；代號 8 有 39%，零分 13%。本題為數量題材，內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的。因此，雖然經過題目導讀，達到 PISA 要求水準的學生還是不到二分之一。

(二) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題表現分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數				
			5	4	3	2	1
答案正確	類型一	會使用 \div 符號 $15 \times 1.3 = 19.5 \div 20$ ， $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \div 34$ ， $34 \times 1.3 = 44.2 \div 45$ A: 15, 20, 26, 34, 45	4	2	4		
		會使用 \div 符號 $15 \times 0.3 = 4.5 \div 5$ ， $15 + 5 = 20$ $20 \times 0.3 = 6$ ， $6 + 20 = 26$ $26 \times 0.3 = 7.8 \div 8$ ， $26 + 8 = 34$ $34 \times 0.3 = 10.2$ ， $34 + 10.2 = 44.2 \div 45$ A: 15, 20, 26, 34, 45			1		
		$15 \times 1.3 = 19.5 = 20$ ， $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 = 34$ ， $34 \times 1.3 = 44.2 = 45$ A: 15, 20, 26, 34, 45	2	1	1		
	類型二	只算出 4 個 $15 \times 0.3 = 4.5$ ， $4.5 \div 5$ ， $15 + 5 = 20$ $20 \times 0.3 = 6$ ， $6 + 20 = 26$ $26 \times 0.3 = 7.8$ ， $7.8 \div 8$ ， $26 + 8 = 34$ A: 15, 20, 26, 34			1		
	類型三	只算出 3 個 $15 \times 0.3 = 4.5$ ， $15 + 4.5 = 19.5 \div 20$ $20 \times 0.3 = 6$ ， $6 + 20 = 26$ A: 15, 20, 26	1				
		只算出 3 個 $15 \times 1.6 = 24$ ， $24 \times 1.5 = 26$ A: 15, 20, 26	1				
		只算出 3 個 $15 \times 1.3 = 19.5 \div 20$ ， $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \div 34$ A: 20, 26, 34	1	1	2		
		只算出 3 個，A: 15, 30, 40			1		
	類型四	算出 5 個，答對 4 個，計算錯誤		1	2		
	類型五	算出 5 個，答對 3 個，計算錯誤			1		
答案錯誤	類型一	$15 \times 1.3 = 19.5$				1	
	類型二	A: 15, 20, 24				1	
	類型三	$15 + 4.5 = 19.5 = 20$ ， $20 + 4.5 = 24.5 = 25$ A: 15, 20, 25					1
	類型四	嘗試解題					1
計	人數		9	5	13	2	2

由上表之解題類型分析，得知達到 Level 5 和 4 的有 14 位，約佔全班人數二分之一；答案正確，達到 Level 3 的 13 位學生，需加強其解題說理與計算能力；答案錯誤，成績為 Level 2 和 1 的 4 位學生，需個別指導以建立其數學概念。

(三) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題示例萃取

Level 5 答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。	
<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 1.3 = 19.5 \approx 20$ $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \approx 34$ $34 \times 1.3 = 44.2 \approx 45$ <p>A: 15mm, 20mm, 26mm, 34mm, 45mm</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>因為15mm要乘1.3才會等於下一個數，不過機器不能做小數點的硬幣，所以要用無條件進位法來算。</p>	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 1.3 = 19.5 \approx 20$ $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \approx 34$ $34 \times 1.3 = 44.2 \approx 45$ <p>A: 15, 20, 26, 34, 45 (mm)</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>由直徑最小的15毫米開始乘上30%也就是1.3。若乘出的答案為非整數，就將它約成離答案最近的整數，但不能小於此數，才能符合第二個要求。</p>
<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 1.3 = 19.5 \approx 20 \text{ (mm)}$ $20 \times 1.3 = 26 \text{ (mm)}$ $26 \times 1.3 = 33.8 \approx 34 \text{ (mm)}$ $34 \times 1.3 = 44.2 \approx 45 \text{ (mm)}$ <p>A: 15mm, 20mm, 26mm, 34mm, 45mm</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>我要進位的原因是，因為每個數都乘1.3，但進位代表那乘出來由數比1.3大，但沒捨去代表那乘出來由數比1.3小。</p>	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 1.3 = 19.5 \approx 20$ $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \approx 34$ $34 \times 1.3 = 44.2 \approx 45$ <p>A: 15mm, 20mm, 26mm, 34mm, 45mm</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>如果15x1.3=21是第2枚硬幣，那第3枚硬幣就是21x1.3=整數，但是21不管乘多少都不是整數，所以我就用15x1.3=24，這樣24x1.3=36，這樣就都是整數了。</p>
Level 3 1. 答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明，或文字圖形說明錯誤。 2. 答案正確，文字或圖形說明正確，但無計算過程，或計算過程錯誤。	
<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 0.3 = 4.5$ $20 \times 0.3 = 6$ $26 \times 0.3 = 7.8$ $34 \times 0.3 = 10.2$ $43 \times 0.3 = 12.9$ <p>A: 15, 20, 26, 34, 45</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>乘以0.3就是硬幣直徑的30%四捨五入是因為只能產生整數又捨大於30%。</p>	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 \times 1.3 = 19.5 \approx 20$ $20 \times 1.3 = 26$ $26 \times 1.3 = 33.8 \approx 34$ $34 \times 1.3 = 44.2 \approx 45$ $43 \times 1.3 = 55.9 \approx 60$ <p>A: 15mm, 20mm, 26mm, 34mm, 45mm</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>每個硬幣比下一個硬幣都大30%，再加上原本的，就乘上1.3。但是機器只能做出整數，所以如果有小數的話，必須無條件進入，算一算有五種直徑，所以這套新硬幣的直徑有15mm, 20mm, 26mm, 34mm, 45mm。</p>
Level 1 嘗試回答。	
<p>修改前</p> <p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 + 4.5 = 19.5 \approx 20$ $20 + 4.5 = 24.5 \approx 25$ <p>A: 15, 20, 25</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>設計的硬幣條件一定要符合一定的條件，有些符合，有些不符合!!!</p>	<p>修改後</p> <p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> $15 + 4.5 = 19.5 \approx 20$ $20 + 4.5 = 24.5 \approx 25$ $25 + 4.5 = 29.5 \approx 30$ $30 + 4.5 = 34.5 \approx 35$ $35 + 4.5 = 39.5 \approx 40$ <p>A: 15, 20, 25, 30, 35, 40</p> <p>◎請說明你的想法。</p> <p>設計的硬幣條件一定要符合一定的條件，有些符合，有些不符合!!!</p>

學生解題示例萃取，可提供學生解題觀摩的機會，也可提供教師教學改進之參考。

三、「搶劫」問題之解題表現分析

(一) 以 PISA 之評分標準來評分，學生之解題表現分析

代號 2 (滿分)		代號 1 (部分得分)		代號 0 (零分)		代號 9 (沒作答)	
人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
2 人	6%	20 人	65%	9 人	29%	0 人	0%

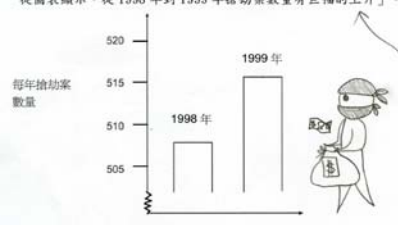
「搶劫」問題之整體評量表為滿分 6%，部分得分 65%，零分 29%。本題為統計題材，內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的。因此，達到 PISA 要求水準的學生只有 6%，滿分和部分得分學生數雖然已達 71%，但是本題帶給教師的省思是教學過程中宜引導學生從圖表、比率、百分比、趨勢變化等角度來看統計圖表，及運用較精確的數學語言描述統計圖表所代表的意涵。

(二) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題表現分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數				
			5	4	3	2	1
答案正確	類型一	不合理，巨幅的上升不可能沒超過 5%，(個人認為)一般而言上升 40% 才算巨幅， $516-508=8$ ，多 8 件大約 2%~1.5% 而已。	1				
	類型二	不合理，因為平均起來一天約 2~3 次，而且次數才相差 7 次，巨幅只是因為圖表相差太大。(他的圖不應該會這麼大)	2				
	類型三	不合理，因為 1998 年大約有 508 件，而 1999 年約有 516 件，只差 7 件而已，所以並沒有巨幅的上升。	8				
	類型四	不合理，因為 1998 年和 1999 年才差不到十件，並沒有巨幅的上升。		7			
	類型五	不合理，因為主播並沒有把圖表示清楚，也沒有標出單位。		2			
	類型六	不合理，我覺得應該用折線圖分出 1998 年~1999 年每個月的搶劫案數量，才能分出是否有巨幅上升。			1		
	類型七	不合理，因為 1998 年~1999 年之間可能有下降。			1		
	類型八	不合理，因為每天都有一兩件，都沒停。			2		
	類型九	不合理，(各類錯誤說法)			5		
答案錯誤	類型一	合理，因為 1998, 1999 年的搶劫也沒相差多少，從 508~515 也不是不合理的。				1	
	類型二	合理，看起來很標準					1
計			11	9	9	1	1

由上表之解題類型分析，得知達到 Level 5 和 4 的有 20 位，約佔全班人數三分之二；答案正確達到 Level 3 的 9 位學生，和答案錯誤達到 Level 2 和 1 的 2 位學生，均需重新建立其解讀統計圖表的能力。

(三) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題示例萃取

Level 5 答案正確，文字說明完整正確。	
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理 巨幅的上升不可能沒有理由 (個個為一組而上升40%才算巨幅 516-508=8 8件大約2%~15%而已</p>	<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理 A: 因為他的圖不應該會這麼大，一下子才增長了8件不算是「巨幅上升」吧!</p>
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理 A: 合理；從上圖來看，1998年有508左右的搶劫案件，1999年有517左右的搶劫案件，二年來的搶劫案件，只差幾件，沒有巨幅的上升。</p>	<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理，因為1998年有507件然後1999年有516件，兩個相減是相差8件，沒有多出很多件，所以，我覺得的不能用巨幅的上升。</p>
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>A: 不合理，因為1998年的劫案數量是508件，1999年的卻是516件，才多8件，根本不是巨幅上升。 A: 不合理，因為一年五百一十件就變成大約兩天就三件，搶劫案不可能那麼頻繁。</p>	<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>A: 不合理，因為1998年大約有508件，而1999年約有516件，只差7件而已，所以並沒有巨幅的上升。</p>
Level 4 答案正確，文字說明正確，但不夠完整。	
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理，因為1998年和1999年才差不到十件，並沒有「巨幅」的上升。</p>	<p>電視主播呈現了下面這報導： 「從圖表顯示，從1998年到1999年搶劫案數量有巨幅的上升」。</p>  <p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理</p> <p>表上的兩項數量沒有相差很多，所以不是巨幅上升，而且表上也沒寫單位。</p>
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>A: 不合理，因為搶劫案沒有大幅的上升，只有上升約7.8件搶劫案。</p>	
Level 3 答案正確，但無文字說明，或文字說明錯誤。	
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>A: 不合理，因為1998年~1999年中間的數量有可能會下降，所以我覺得用折線圖分出1998年~1999年每個月的搶劫案數量，來統計出是否有巨幅上升。</p>	<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>不合理 因為每天都有一天都有一兩件，都沒停可是新聞一天又沒報多。</p>
Level 2 答案不正確，但包含正確的數學推理。	Level 1 嘗試回答。
<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>合理 因為1998,1999年的搶劫案也沒相差多少在508~515也不是合理的。</p>	<p>問題：你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。</p> <p>合理。因為看起來很標準。</p>

學生解題示例萃取，可提供學生解題觀摩的機會，也可提供教師教學改進之參考。

四、「測驗分數」問題之解題表現分析

(一) 以 PISA 之評分標準來評分，學生之解題表現分析

代號 1 (滿分)		代號 0 (零分)		代號 9 (沒作答)	
人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
18 人	58%	13 人	42%	0 人	0%

「測驗分數」問題之整體評量表現為滿分 58%，零分 42%。本題為統計題材，內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的，難度高於第三題「搶劫」問題，本來以為學生無法運用數學觀點提出自己的看法，沒想到達到 PISA 要求水準的學生竟然有 58%，真是令人驚艷。

(二) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題表現分析

解題類型分析			評分 Level 1-5 人數				
			5	4	3	2	1
答案 正確	類型一	◎通過人數和不通過人數皆有提到。 A 組通過人數比 B 組多 1 人。 A 組不通過只有一人，B 組有 2 人不通過。	4				
	類型二	◎只比較通過人數。 A 組通過人數比 B 組多 1 人。	6				
	類型三	◎只比較不通過人數。 A 組不通過只有一人，B 組有 2 人不通過。	5				
	類型四	提到 50 分以下不算或 80-90 分 A 組人數多，但說法不完整。		3			
	類型五	有的理由正確，有的理由錯誤。			3		
答案 錯誤	類型一	嘗試回答					10
計			15	3	3		10

由上表之解題類型分析，得知達到 Level 5 和 4 的有 18 位，佔全班人數的 58%；答案正確達到 Level 3 的 3 位學生，和答案錯誤達到 Level 1 的 10 位學生，均需重新建立其解讀統計圖表的能力。

(三) 以 QUASAR 紙筆認知評量之評分規準來評分，學生之解題示例萃取

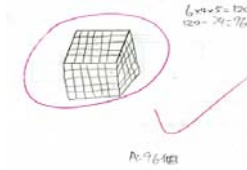
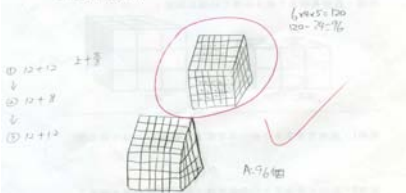

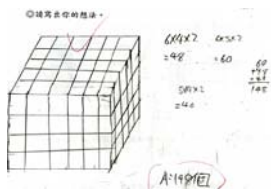
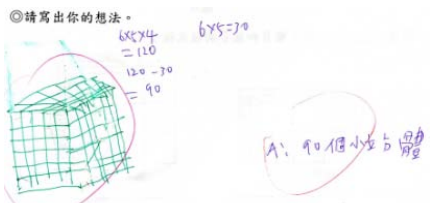
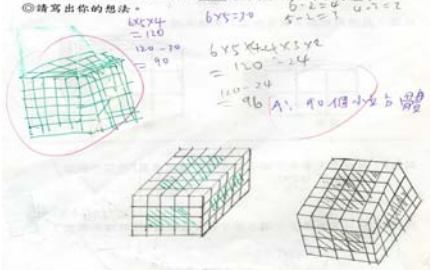
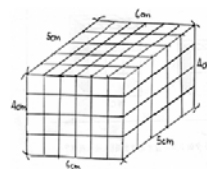
Level 5 答案正確，文字說明完整正確。	
<p>◆◆◆◆◆ 測驗分數 ◆◆◆◆◆</p> <p>下面是兩組學生參加科學測驗的結果，這兩組學生分別稱為 A 組和 B 組。A 組的平均分數是 62.0 分，B 組的平均分數是 64.5 分。當學生得分為 50 分或以上時他們便通過這個測驗。</p> <p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>A: $62 \times 12 = 744$ B: $64.5 \times 12 = 774$ $774 - 744 = 30$ $30 \div 12 = 2.5$ A 組的學生比 B 組多 2.5 分</p> <p>A 組的學生在 50-59 和 80-89 都比 B 組多，而且 B 組比 A 組在 60-69 多 1 人和 70-79 多 1 人加起來 2 人，A 組在 50-59 和 80-89 多 2 人，80-89 多 1 人，加起來多 3 人 $3 > 2$ 所以 A 組比較好。</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>A 組的學生雖然平均輸給 B 組，但 A 組的通過人數卻比 B 組高，A 組只有一個人沒過，但 B 組卻有兩個。</p>
<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>A 組：3 + 4 + 2 + 2 = 11 (人) B 組：1 + 5 + 3 + 1 = 10 (人)</p> <p>他說 50 分以上通過測驗，所以 A 組通過人數比 B 組多一人，所以 A 組同學考得比較好。</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>A 組有 11 人過，B 組只有 10 人過，所以 A 組可以利用這個論點來說服老師。</p>
<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>由於 50 分有 A: 11 人 B: 21 人 高於 50 分有 A: 11 人 B: 10 人</p> <p>不用用平均分數來決定誰比較高。</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>因為 A、B 組各有 12 位學生，B 組雖然平均成績較高，但通過的人數只有 10 人，A 組卻有 11 人通過。</p>
Level 4 答案正確，文字說明正確，但不夠完整。	
<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>他們認為有可能是因為把 50 分算不裡面</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>有可能是 A 組不通過的人把平均往下滑，其他通過的人沒把平均拉高。</p>
Level 3 答案正確，但無文字說明，或文字說明錯誤。	
<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>B 組可能只有幾個人考及格，但大多數的人不及格，而 A 組考及格的比較多，只是 A 組不及格的分數把及格的分數拉低，所以 A 組還是比 B 組好。</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>最高分數 80~89 分中，A 組得分人數多於 B 組，雖然在其餘分數中人數都少於 B 組，但在最高分數中人數較多，也代表 A 組同學平均都高於 B 組！</p>
Level 1 嘗試回答。	
<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>因為我覺的 A 組學生不完全是都 50 分也有些考 51 分，52 分，53 分，54 分，55 分，56 分，57 分，58 分，59 分所以 60~69 分和 70~79 分還有 80~89 分都有可能超過 60 分在 69 分以內，不一定把 A 組的分數加起來在去平均，然後把 B 組的分數加起來在去平均，或許 A 組的平均會比 B 組的平均還要高。</p>	<p>問題：由上圖，老師認為 B 組學生比 A 組學生的表現較佳。但 A 組學生不同意老師的看法。他們試著說服老師 B 組並不一定比較好。依據上圖，寫出一個 A 組學生可能使用的數學論點。</p> <p>A 有 0~9 B 有 40~49 $1 = -1$ A 的 50~59 比 B 多 2 = +2, A 的 60~69 比 B 少 1 = -1, A 的 70~79 比 B 少 1 = -1, A 的 80~89 比 B 多 1 = +1, 全部 = 2 + 1 + 1 - 1 - 1 = 0</p> <p>B 有 40~49 比 A 多 1 = +1, 50~59 比 A 少 2 = -2, 60~69 比 A 多 1 = +1, 70~79 比 A 多 1 = +1, 80~89 比 A 少 1 = -1, 全部 = +1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0</p> <p>A = 0, B = 0 = 一樣</p>

學生解題示例萃取，可提供學生解題觀摩的機會，也可提供教師教學改進之參考。

五、補救教學與深化學習

一、「積木」問題

(一)首先以個別訪談方式，進行一對一補救教學，舉例如下：

生	解題類型	以個別訪談方式進行補救教學
S14	<p>答案正確，算式正確，圖形錯誤。</p>  <p>修正後：</p> <p>問題4：現在，蘇麗想做出一個由個小立方體長、5個小立方體寬、4個小立方體高的積木模型。假如她想用最少的小立方體，並在內部留出可能最大的空心空間。蘇麗需要最少幾個小立方體？</p> <p>◎請寫出你的想法。</p> 	<p>T:你是怎麼算出來的?</p> <p>S: $12+12=24$，挖掉 24 個。 (在圖上方塗 12 格和側面塗 12 格)</p> <p>T:可是，你多畫一層了。</p> <p>S:要改成 $12+8=20$。 (在圖上方塗 12 格和側面塗 8 格)</p> <p>T:可是，這樣改，答案就錯了。</p> <p>S:……</p> <p>T:(教師秀出下圖引導學生理解題意) 你知道要挖掉多少了嗎?</p>  <p>S:知道，要挖掉 $12+12$，兩層。</p>
S10	<p>答案錯誤，圖形正確，算式錯誤。</p> 	<p>T:你知道錯在哪裡了嗎?</p> <p>S:有重疊，沒有扣掉。</p> <p>T:那麼，要扣掉多少嗎?</p> <p>S:(想了一會兒):好複雜喔！我用別的方法算算看。修正如下： $6 \times 5 \times 4 - 2 \times 3 \times 4 = 120 - 24 = 96$</p>
S30	<p>答案錯誤，圖形錯誤，算式錯誤。</p> <p>◎請寫出你的想法。</p>  <p>修正後：</p> <p>問題4：現在，蘇麗想做出一個由個小立方體長、5個小立方體寬、4個小立方體高的積木模型。假如她想用最少的小立方體，並在內部留出可能最大的空心空間。蘇麗需要最少幾個小立方體？</p> <p>◎請寫出你的想法。</p> 	<p>T:(秀出同學畫的很清晰的圖，如下圖) 你知道錯在哪裡了嗎?</p>  <p>S:知道，我會改了。</p> <p>修正如下： $6-2=4$，$5-2=3$，$4-2=2$ $6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 = 120 - 24 = 96$。</p> <p>T:請把圖修正。</p> <p>S:畫一個很漂亮的圖。(中圖)</p> <p>T:你的圖畫得很好，誰教你的。</p> <p>S:我不會畫，請同學幫我畫的。</p> <p>T:你也學著畫畫看吧。</p> <p>S:好的(結果畫得很好)(右圖)</p> <p>T:你的學習態度真好，進步真多!</p>

(二)透過同儕觀摩討論方式，進行深化學習。

展示優秀作品，相互觀摩，探討如何將自己所知道的數學概念和解題策略，透過圖形、算式或文字表達出來，如何做到 Level 5「答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。」的要求。

二、「硬幣」問題

(一)以個別訪談方式，進行一對一補救教學，舉例如下：

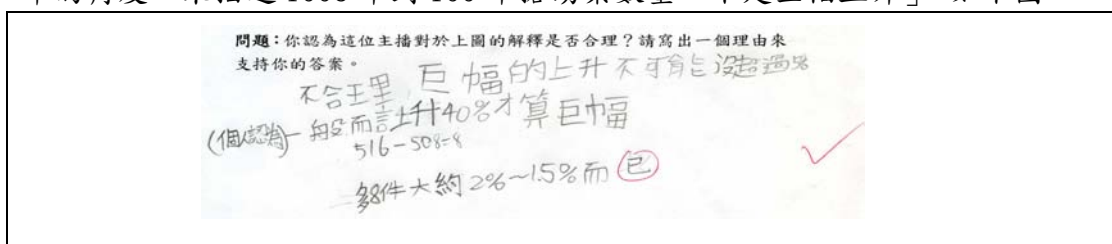
生	解題類型	以個別訪談方式進行補救教學
10	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> <p>◎請說明你的想法。</p>	<p>T: 你知道哪裡錯了嗎？</p> <p>S: 不知道。</p> <p>T: 你是如何得到 44 的。</p> <p>S: 用四捨五入法得到的。</p> <p>T: 44.2 和 34 來比較，大了百分之多少？</p> <p>S: 大了百分之三十。嗯，要用無條件進位法進到 45 才對。</p>
26	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> <p>◎請說明你的想法。</p>	<p>T: 說說看你是怎麼算的。</p> <p>S: 先算 $15 \times 0.3 = 4.5$， $15 + 4.5 = 19.5$，進到 20；再把 $20 + 4.5 = 24.5$，進到 25。</p> <p>T: 15 和 20 是對的，但是第三個硬幣要比 20 大 30% 才對，你知道 20 的 30% 是多少嗎？</p> <p>S: 知道，修正如左圖右側之算式。</p>
12	<p>問題：請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。</p> <p>從一枚15毫米的硬幣開始，而且在你這套系統裡盡可能包含所有的硬幣大小，則這套系統裡的硬幣直徑分別為多少？</p> <p>◎請說明你的想法。</p>	<p>T: 如果老師有 100 元，你的錢比老師多 30%，你有多少錢？</p> <p>S: ……。</p> <p>T: 30% 換成小數是多少？</p> <p>S: 0.3。</p> <p>T: 100 的 0.3 倍怎麼算？</p> <p>S: 100×0.3</p> <p>T: 那麼，老師有 100 元，你的錢比老師多 30%，你的錢要用 100 乘以多少？</p> <p>S: 100 乘以 1.3，是 130 元。</p> <p>T: 很好，題目中的第一個硬幣是 15，第二個硬幣要比 15 大 30%，你會算了嗎？</p> <p>S: 會（寫 $15 \times 1.3 = 19.5 \div 20$）</p> <p>（之後反覆問話，直到修正完成如左圖右側之算式）</p>

(二) 透過同儕觀摩討論方式，進行深化學習。

首先展示 Level 5 的作品，相互觀摩同學之解題與說理，其次引導學生探討只找出 4 個硬幣和 3 個硬幣，是否吻合題目的要求。學生認為題目有提到「盡可能包含所有硬幣大小」，因此，找出 5 個硬幣當然最完美；但是因為題目只有說「盡可能」，沒有說「一定要」，因此，找出 4 個硬幣或 3 個硬幣，也可以說是吻合題目的要求；最後透過討論，共同探討概數之紀錄格式，及無條件捨去、無條件進入和四捨五入法的意涵。

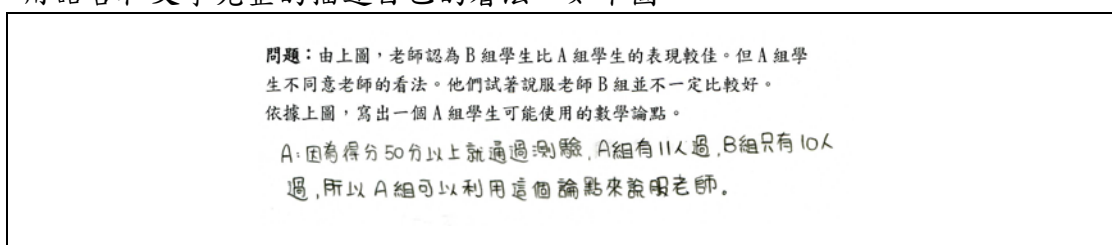
三、「搶劫與測驗分數」問題

以「搶劫」問題來看，從學生的解題說理表現，可以看出學生對於有省略符號的統計圖表是認識且理解的，但是對於如何描述統計圖表所蘊涵的意義，能力則較為缺乏，因此，「搶劫」問題的補救教學採用同儕觀摩討論方式，來進行深化學習。本題的解題策略中，難得的是有一位學生的解題達到 PISA 代號 2 滿分的要求，也達到 QRASAR Level 5 的要求，因此首先展示其作品，引導學生從比率的角度，來描述 1998 年到 199 年搶劫案數量「不是巨幅上升」，如下圖：



其次，引導學生從圖表角度來看問題，及運用較精確的數學語言來描述統計圖表所代表的意涵，如：要與總數 500 比較，才能彰顯數量「不是巨幅上升」。

以「測驗分數」問題來看，從學生的解題說理表現，看出有 58% 的學生能掌握題目中所提到的「得分 50 分或以上時便通過測驗」這個訊息，以通過和不通過人數作為論述的基礎。當然也有 10 位學生對於平均分數的意義，不甚了解；對於解讀統計圖表，能力也不足，因此，「測驗分數」問題的補救教學採用同儕觀摩討論方式，來進行深化學習。首先展示 Level 5 的作品，引導學生探討如何用語言和文字完整的描述自己的看法，如下圖：



其次，引導學生從高分群人數、平均分數、捨去極端分數等角度看問題，並運用較精確的數學語言來描述統計圖表所代表的意涵。

伍、結果與討論

一、學生在 PISA 樣本試題之數、量、形三種題型中，數學解題與說理的能力

(一) 以 PISA 平分規準來看

1. 積木問題：為幾何題材，內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，整體評量表表現為問題 1、2 滿分 100%；問題 3 滿分 87%，零分 13%；問題 4 滿分 77%，零分 23%；本題有 77% 的學生達到 PISA 的要求水準。

2. 硬幣問題：為數量題材，內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的。整體評量表表現為滿分 48%；代號 8 人數 39%，零分 13%。雖然經過題目導讀，本題

仍然只有 48% 的學生達到 PISA 要求水準。

3. 搶劫問題：為統計題材，內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的。本題評分標準除了代號 1 之外，還提高到較高水準的代號 2，整體評量表現為代號 2 人數 6%，代號 1 人數 65%，零分 29%。本題有 71% 的學生達到 PISA 的要求水準。

4. 測驗分數問題：為統計題材，內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的，難度高於第三題「搶劫」問題，整體評量表現為滿分 58%，零分 42%。本來以為學生無法運用數學觀點提出自己的看法，沒想到達到 PISA 要求水準的學生竟然有 58%，真是令人驚艷。

（二）以 QUASAR 紙筆認知評量規準來看

達到 QUASAR 紙筆認知評量規準 Level 5 和 4 的人數，積木問題有 16 位，占 52%；硬幣問題有 14 位，占 45%；搶劫問題有 20 位，占 65%；測驗分數問題有 18 位，占 58%；顯示有半數左右學生的解題說理能力頗佳；但是實施 QUASAR 紙筆認知評量最大的價值所在是找出 Level 3、2 的學生，以透過補救教學澄清其迷思概念、建立其數學概念，並加強解題說理能力。

二、如何澄清學生的數學迷思概念，如何提升學生解題說理能力

（一）以積木問題為例，針對 Level 3、2 和 1 的學生，先透過個別訪談方式，進行一對一補救教學，最後再透過同儕觀摩討論方式，探討如何將自己所知道的數學概念和解題策略，透過圖形、算式或文字表達出來，效果甚佳。

（二）以硬幣問題看來，「計算」對學生來說不難，因此，除了針對 4 位 Level 2 和 1 的學生進行一對一補救教學之外，主要是透過同儕觀摩討論方式，引導學生探討只找出 4 個硬幣和 3 個硬幣，是否吻合題目的要求；並探討概數之紀錄格式，及無條件捨去、無條件進入和四捨五入法的意涵，以達到深化學習之效果。

（三）以搶劫與測驗分數問題來看，由於解題要求是學生所不熟悉的，從學生的解題說理表現，發現學生對於如何描述統計圖表所蘊涵的意義，能力普遍缺乏，因此，直接採用同儕觀摩討論方式，引導學生從圖表、比率、平均數、高分群、極端值等角度看統計圖表，並引導學生運用較精確的數學語言描述統計圖表所代表意涵，以提升其評析和論述的能力。

陸、分享與建議

一、運用 PISA 評量試題於國小課堂，宜慎選題目，教師不需害怕 PISA 評量試題，但是也不能小看 PISA 評量試題。

在剛接觸 PISA 評量試題，而尚未運用 PISA 評量試題於國小課堂之初，平心而論，筆者對 PISA 評量試題有點畏懼，尤其是圖形或敘述很複雜的題目；在分析過評量試題之後，又覺得有些題目實在是太簡單了；可是，實際運用 PISA

評量評量試題於國小課堂之後，從學生的表現，不禁覺得不能小看 PISA 評量試題，前前後後心情的改變，有如洗三溫暖。因此，建議國小教師宜主動接觸了解 PISA 評量試題，以克服畏懼的心理；也要幫助學生從體驗中，克服畏懼的心理；當然，教師在運用 PISA 評量試題於國小課堂之前，宜慎選題目。

二、運用 PISA 評量試題於國小課堂，題目的篩選與安排，宜由淺入深。

本研究篩選的題目涵蓋幾何、數量、統計三個主題，共有四個題目，第一題內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的；第二題內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的；第三、四題內容敘述清楚，解題要求是學生不熟悉的；題目類型由淺入深，循序漸進，因此，學生可以在解題能力及解題信心範圍內，澄清其迷思概念、培養其讀題能力，進而提升其解題說理能力；建議教師運用 PISA 評量試題於國小課堂，題目的篩選與安排，宜由淺入深。

三、運用 PISA 評量試題於國小課堂，不宜奉 PISA 評量的評分規準為聖經，可搭配 QUASAR 評分規準來評分。

PISA 評量每一題都分別提供評分標準，而其標準是因應 15 歲學生而設的，因此，PISA 樣本試題運用於 12 歲的國小學生，其評分規準，不宜奉為聖經，建議搭配 QUASAR 評分規準來評分，並引導學生學習如何將自己所知道的數學概念和解題策略，透過圖形、算式或文字表達出來，朝向 Level 5「答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確」的目標邁進。

四、評量後的補救教學措施，可採個別訪談及同儕觀摩討論方式進行。

運用 PISA 評量試題評量後，欲發揮其功能，適當的補救教學措施是必須的，可透過個別訪談方式進行一對一補救教學；也可透過同儕觀摩討論方式，進行深化學習。以本研究為例，第一、二題評量後的補救教學措施為先透過個別訪談方式，進行一對一補救教學；再透過同儕觀摩討論方式，探討如何將自己所知道的數學概念和解題策略，透過圖形、算式或文字表達出來。第三、四題則直接透過同儕觀摩討論方式，探討如何將自己的評析和論點，用文字表達出來。

五、運用 PISA 評量試題於國小課堂的價值是可藉由學生解題表現，彰顯教師教學及學生學習不足之處，作為未來教學改進之參考。

筆者嚐試運用 PISA 評量試題於國小課堂，從學生的解題表現，頗能彰顯學生解題與說理表現的長處，與教師教學及學生學習不足之處。以「積木」問題來說，由於國小課程並沒有強調繪製立體幾何圖形的教學，從學生解題表現，發現學生繪製幾何圖形的能力落差很大，而經過補救教學之後，每個學生都能繪出立體圖，因此，國小課程是否可以加入繪製立體幾何圖形的教學，值得大家深思。以「硬幣」問題來說，學生處理複雜資訊的能力明顯不足，在題目導讀之後，從

學生的解題表現，看出學生數量計算能力頗佳，但是「答題後檢視答案的能力」仍然不足，因此，教師宜多下功夫培養學生的後設認知能力。以「搶劫」問題來說，評量重點是學生解讀統計圖表與說理的能力，最讓筆者震撼的是PISA在此題目之評分標準設定很高，當15歲的學生在答案中提到「1998年有508件，1999年有516件，只相差8件，因此，不是巨幅上升」，只能得到基本分1分；必須提到與總數500作比較，才能得滿分2分。可見，引導學生用較精確的數學語言描述現象，是我們未來努力的目標。以「測驗分數」問題來說，評量重點是學生評析統計圖表與說理的能力，期望學生論述「平均分數」並不是判斷兩組學生成績好壞的唯一標準，對於提升學生解讀統計圖表能力的幫助很大，對於教師進行統計圖表教學的啟示更大。

本文「運用PISA評量試題於國小六年級之數學解題初探」從PISA評量題目篩選、評分規準設定、學生的解題類型分析、個別訪談補救教學及同儕解題觀摩討論等向度，詳細描述國小六年級運用PISA評量試題的作法與反思；期望值此PISA評量逐漸成為領導數學教育潮流的今天，能提供有意從國小開始培養學生數學素養的教育單位、教師或家長參考。

參考文獻

- Anthony, N. (1989). *Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning*. Kansas: University of Pittsburgh.
- Lane, S. & Silver, E. A. (1995.). *Equity and Validity Consideration in the Design and Implementation of Mathematics Performance Assessment: The Experience of the QUASAR Project*. In: M. Nettles, & A. L. Nettles (Eds), *Equity and excellence in educational testing and assessment* (pp. 185-219). Boston: Kluwer
- PISA樣本試題。民100年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。
- 洪碧霞(2010)。臺灣PISA2009精簡報告。民100年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。
- 洪碧霞(2010)。臺灣PISA2009結果報告(PPT)。民100年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。
- 關於PISA。民100年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。

國小學童的 PISA 試題初體驗—以六年級為例

台南市數學科輔導員 曾曉馨

一、前言

由經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Cooperation and Development）主辦的國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment，簡稱 PISA），係以檢測 15 歲學生是否儲備未來所需的各項能力與素養為目標，藉此評鑑學校培育學生面對未來挑戰的效能，近來已被參與國視為教育政策的發展依據。

數學被 OECD（2002）定義為一種工具、一種公民素養，而所謂「數學素養」（Mathematical Literacy）就是學生必須有能力去辨識、理解、探索數學在生活世界的意義，在情境中做出有效的數學判斷，透過建構、關懷、反省進行邏輯思考，致力於解決生活上出現的數學問題。因此，PISA 明確地與傳統學校課程要素區隔，以現象學取向（phenomenological approach）組織數學內容（content），透過**變化與關係、空間與形狀、量、不確定性**4 個概念（overarching concepts），將算數、幾何、代數、微積分學等 12 個領域完全包羅進去(周玉秀，2006)。

現象學教育大師荷蘭數學家 Freudenthal(1970)強調「學生不是學習『應用數學』，而是學習如何應用『數學』」。筆者認為，學習如何應用數學解題，學生必須經歷「**概念化**—將問題轉化為數學概念列式」、「**運算化**—進行算式的計算」和「**溝通化**—以數學式的語言溝通想法」3 個歷程，彼此之間環環相扣，其中，普遍存在於台灣小學數學教學現場的瓶頸，要以「概念化」和「溝通化」為主，面對題目靈活、強調通盤理解、歸納、推理與溝通能力的 PISA 試題，台灣的數學教育界能有什麼作為？或許我們可以試著從讓學生初探 PISA 試題，透過質性分析的角度，深入了解教學的著力點。

二、實施流程

1. 選擇適合國小六年級學生施測的 3 組題型，進行內容分析，選題原則以涵蓋 PISA 試題的 4 個概念：**變化與關係、空間與形狀、量、不確定性**，並符合六年級學生概念發展為考量依據。
2. 採立意取樣，選擇筆者任教學校 3 班常態編班的六年級學生進行施測，有效樣本為 97 份。
3. 以 PISA 的評分標準進行評分，彙整學生答題情形。
4. 分析學生的錯誤類型與概念迷思。
5. 提出反思與建議。



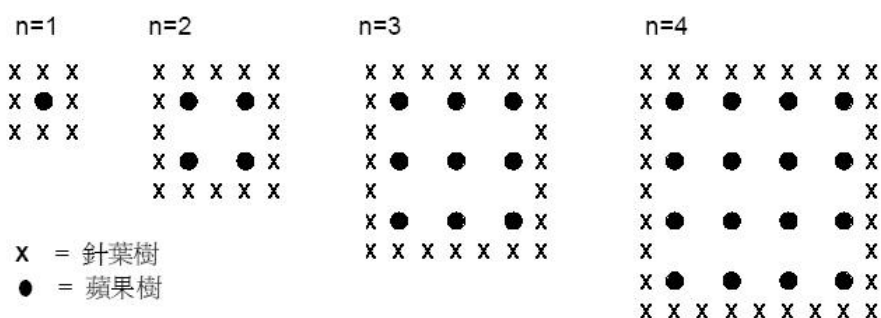
三、 試題分析與施測結果

PISA 由歷程 (processes)、內容與情境 3 個向度轉化數學素養為可評量的能力等級。情境向度涵蓋生活各領域；內容向度，由變化與關係、空間與形狀、量、不確定性 4 個大概念統整所有的傳統數學領域。歷程部份，PISA 將數學素養概分為再複製 (Reproduction)、聯結與統整 (Connections and Integration)、反思 (Reflection) 3 個能力群組 (competency clusters)、6 個能力等級 (level) (周玉秀，2006)。

1. M136：蘋果

農夫將蘋果樹種在正方形的果園。爲了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。

在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數(n)，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：



M136 蘋果				
子題一 完成下表的空格				
		n	蘋果樹數	針葉樹數
		1	1	8
		2	4	
		3		
		4		
		5		
情境向度	內容向度	題型	歷程向度能力等級	九年一貫能力指標
私人	變化與關係	填答	連結與統整 三	N-2-15 能用不同的想法，檢驗答案的合理性。 N-2-17 能察覺簡單數列之規律。 C-E-5 能將問題與解題一般化。

				C-S-4 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。
子題二(略加修改)				
n 等於多少時(也就是種多少列蘋果時)蘋果數量會等於針葉樹的數量？ 請說明你的想法：				
私人	變化與關係	封閉結構	連結與統整四	C-C-1 瞭解數學語言(符號、用語、圖表、非形式化演繹等)的內涵。 C-C-4 用數學的觀點推測及說明解答的屬性。

作答分析：

子題一					
滿分	部分分數		零分		
代號 21	代號 11	代號 12	代號 01	代號 02	代號 99
78.3%	11.3%	3.1%	2.1%	5.2%	0%
子題二					
滿分		零分			
代號 12	代號 13	代號 00	代號 99		
8.2%	33%	43.3%	15.5%		

答題類型分析：

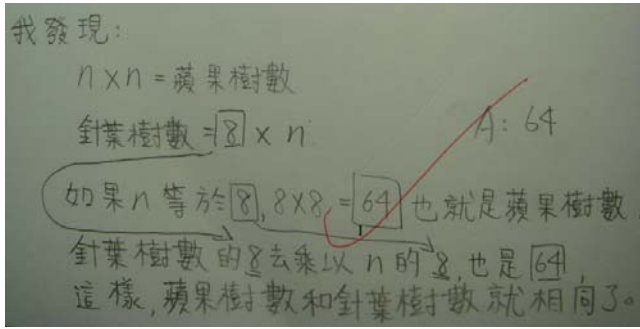
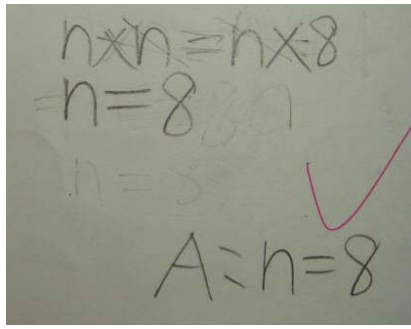
【子題一】

n=1 至 n=4，透過圖示，89.4%的學生均可輕鬆解題；n=5 之後 89.4%的學生便有 11.3%因無法發現數列的規律而解題失敗。

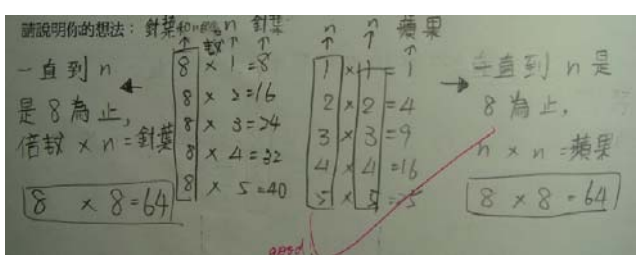
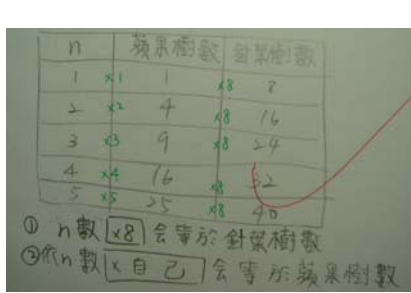
【子題二】

(1) 正確類型

以代數表示出一般式，受限於國小階段尚未有代數運算的教學，因此，學生以數字代入一般式來進行問題。

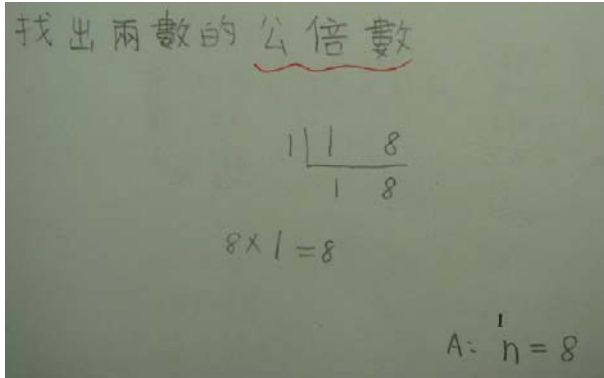


學生能夠透過不明確的代數表示式來加以表徵。

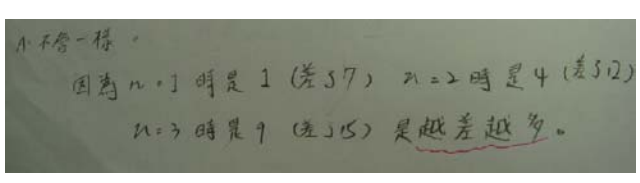


(2) 錯誤類型：

利用 $n=1$ 時兩數的公倍數解題。



觀察幾階的數差，發現差距增加，故妄下定論認定「兩者越差越多，所以不會相等」。



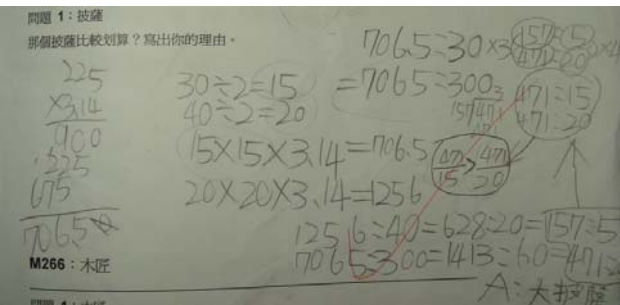
2. M154：披薩

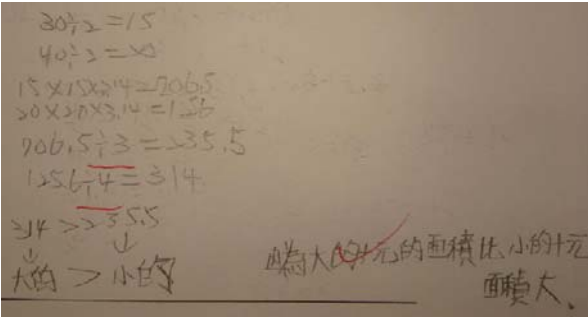
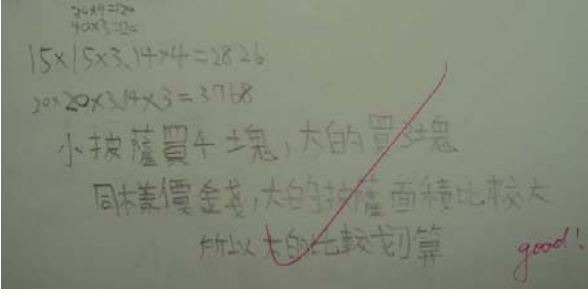
M154 披薩				
披薩店供應兩種厚度相同但大小不同的披薩。小披薩的直徑是30 公分，售價為 30 元。大披薩的直徑是 40 公分，售價為 40 元。 那個披薩比較划算？寫出你的理由。				
情境向度	內容向度	題型	歷程向度 能力等級	九年一貫能力指標
日常	量	封閉 結構		N-3-5 能延伸小數的認識到三位以上(小數)，並解決生活中與小數有關的加、減、乘、除問題。 N-3-12 能對非直線形的平面區域，選定適當的正方形單位，估計其概略面積，並檢驗圓面積公式(π ， r 為圓的半徑)。 N-3-15 能在情境中理解比、比例(包括正比例和反比例)、比值、率(百分率、ppm)的意義。 C-T-1 能把情境中與問題相關的數量形析出。

作答分析：

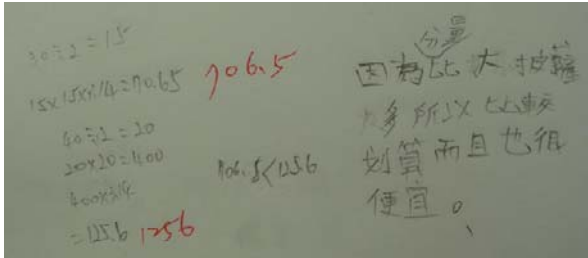
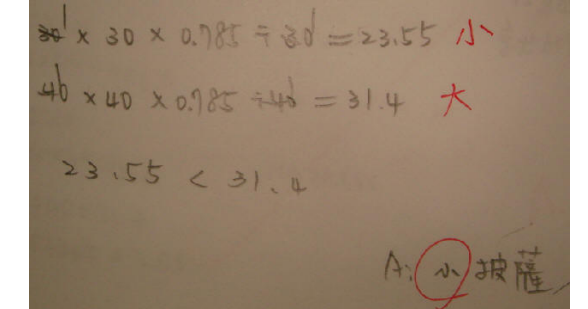
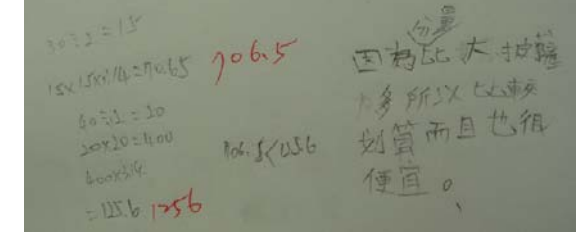
滿分	零分		
代號 1	代號 8	代號 0	代號 9
20.6%	22.7%	47.4%	9.3%

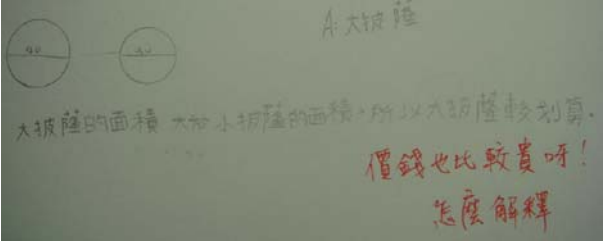
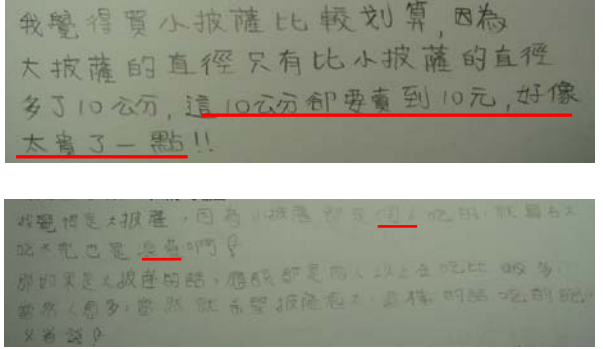
正確類型：

<p>利用「比」的概念來解題，學生對於比例項各數所代表的意涵，概念清楚。</p>	 <p>問題 1：披薩 那個披薩比較划算？寫出你的理由。</p> <p> $30 \div 2 = 15$ $40 \div 2 = 20$ $15 \times 15 \times 3.14 = 706.5$ $20 \times 20 \times 3.14 = 1256$ $706.5 \div 30 = 23.55$ $1256 \div 40 = 31.4$ $23.55 < 31.4$ A: 大披薩 </p>
--	---

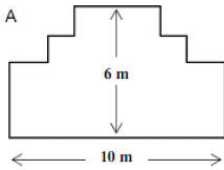
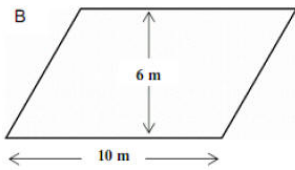
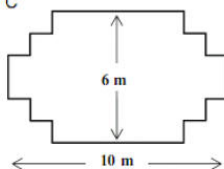
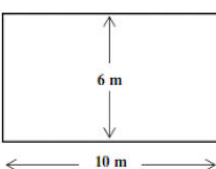
<p>以單位價錢 1 元或 10 元可以買到的披薩面積來加以比較。</p>	
<p>以 30 和 40 的公倍數 120 為單位，比較買到的披薩面積。</p>	

錯誤類型：

<p>未利用面積解題，而是以直徑或周長切入，因而認為一樣划算。</p>	
<p>不清楚算式所代表的意涵</p>	
<p>未考慮價錢，認為大披薩份量多，比較划算。</p>	

	
<p>缺乏數學式的思考與說明</p>	

1. M266：木匠

木匠				
木匠有32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。				
				
				
上面花園的設計是否可以用長度32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。				
花圃的設計		是否能用長度 32 公尺的木板圍成		
A 設計	是 / 否			
B 設計	是 / 否			
C 設計	是 / 否			
D 設計	是 / 否			
情境向度	內容向度	題型	歷程向度	九年一貫能力指標

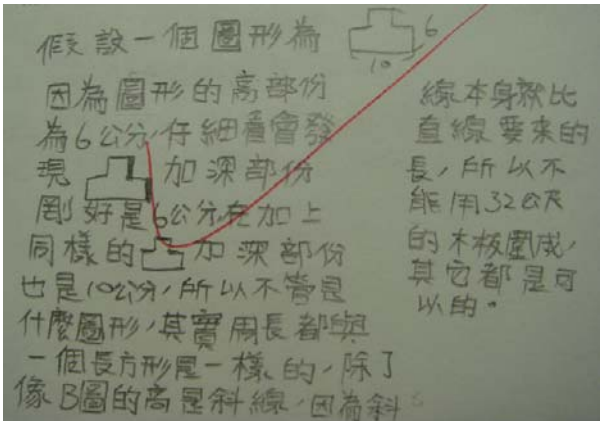
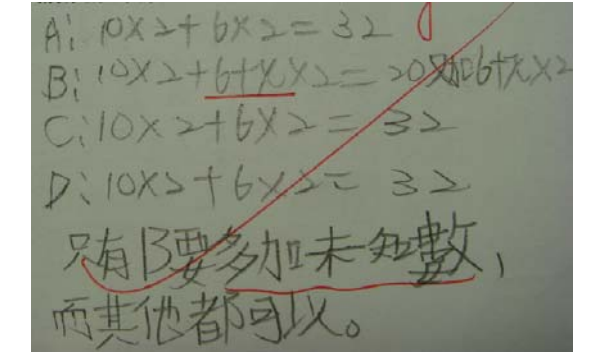
			能力等級	
教育相關	空間與形狀	選擇題	建立數學的 關聯性 六	<p>N-2-9 能在保留概念形成後，進行兩個同類量的間接比較(利用完整複製)及個別單位的比較(利用等量合成的複製)(量：長度、容量、重量、角度、面積、體積)。</p> <p>C-S-1 能分解複雜的問題為一系列的子題。</p> <p>C-S-4 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。</p>

作答分析：

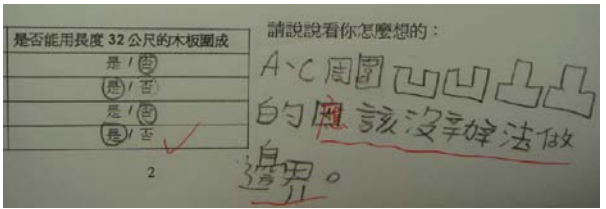
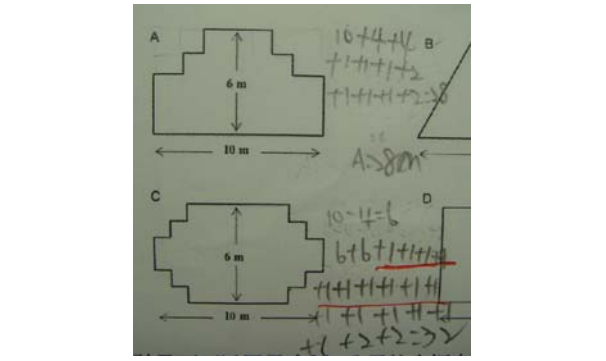
滿分	部分分數	零分	
代號 2	代號 1	代號 0	代號 9
27.8%	35.1%	35.1%	2%

正確類型：

利用邊界補償的方式解題

<p>「利用斜線大於直線」的方式說明選項 B</p>	
<p>利用未知數的方式說明選項 B，但代數運算的技巧尚未純熟。</p> $10 \times 2 + (6 + x) \times 2$ $= 20 + 12 + x \times 2$	

錯誤類型：

<p>不了解邊界的意思</p>	
<p>將每個小線段當成 1 cm</p>	

四、 建議

- 盡量完整呈現 PISA 題型，但須依據學生認知程度加以修正
 本次施測筆者並未將 M136 的子題 3 納入，主要是認為其問題呈現

方式，對國小學童而言較顯困難，故僅只呈現子題 1 和 2，並試著將子題 2 的題目略做修正。然而，在測驗後的課堂討論，曾針對子題 3 拋出「當果園繼續擴充，蘋果樹的數量有沒有可能比針葉樹的數量多？」的問題，筆者發現，學生透過子題 1 和 2 的墊步，已能發展出「 n 大於 8，蘋果樹的數量將大於針葉樹的數量。」之結論。因此，建議未來在進行 PISA 問題的施測時，能盡量考量完整呈現題型，以提供學生進行漸進式的數學建模。

2. 訓練學生進行數學式的溝通

多數學生並不清楚何謂「數學式的溝通」，也就是無法透過數學邏輯，說服自己與同儕信服自己的論點，尤以「披薩」題特別明顯，部分學生甚至由個人喜好、團體與個人需求等情形來討論問題。

3. 提供學生用數學說理的空間

「木匠」題依據 PISA 原題的設計，僅以選擇項目來加以評分，但筆者發現，依此標準，學生在面積與周長概念不清的情況下，認為 A、B 和 C 面積得以補償成長方形，並以為挪移後的長方形與 D 面積相同，因為「負負得正」的結果，竟也得到部分分數，但事實上觀念是一錯再錯。因此，筆者建議後續教師在進行施測的時候，能預留一些讓學生說理的空間，深入了解學生的思考脈絡，一方面培養學生說理的能力，一方面亦可避免錯過學生的想法。

數學 PISA 試題評量——以速率為例

嘉義市崇文國小 作者：林雅惠

一、前言：

PISA 的數學素養評量包括常用的運算、數學思考與分析能力，每個國家的國民都會碰到許多有關數量、空間、機率或者其他數學概念的相關課題。重要的是每一個人都必須能解讀生活中的公車或火車時刻表、處理金錢交易、決定賣場中的最佳購物盤算等，PISA 數學素養即在評量十五歲學生運用數學知識與理解來完成這些課題的能力。

課程中的學習評量中經常出現應用問題，得分的評定準則依據是否應加以再思考。QUASAR 紙筆認知評量工具的發展有四個主要成分為數學內容、認知過程、表徵類型和任務背景。讓學生能再對與錯之外，能鼓勵學生多思考的肯定評量工具。

藉由學期學習課程中結合正規學習內容與彈性生活運用，讓學生能藉由彼此的陳述、互相激盪，在未告知答案的分享下呈現自己數學的判斷。同時增進教師對命題技術與內容之瞭解，提升教師數學教學與命題素養。

二、評量目標：

- (一)、 了解學生學習與開放性 PISA 題目的表現
- (二)、 了解學生質性說明的學習思考能力與方式
- (三)、 了解學生錯誤解題的思考模式與類型
- (四)、 讓學生能勇與於說明表達數學思考方式並以紙筆呈現
- (五)、 教師能以參考 QUASAR 方式進行評量與解題類型分析將解題說理的層次釐清分析

三、實施年級：

為嘉義市崇文國民小學六年級第二學期的學生，共 32 位學生。

四、實施流程：

- (一)、 進行教學（六年級下學期數學課程——速率）
- (二)、 分析 PISA 題目
- (三)、 選定評量題目
- (四)、 進行 QUASAR 紙筆評量（練習與正式）
- (五)、 共同分享解題的策略
- (六)、 解題答案分析
- (七)、 解題說理能力分析
- (八)、 解題類型分析
- (九)、 解題示例萃取
- (十)、 評量資料數位建檔紀錄

(十一)、 進行分享

五、 評量內容：

以課程為主體，摘選自 PISA 兩個題目，增加質性的解題問題問題：
練習——M432（反應時間）、正式——M159（賽車速度）

六、 評量標準：仿 QUASAR 方式，修正後進行評量與解題類型分析。

與學生先達成共識：並非學習成就表現，評量是以了解學習思考為目的。因此，選項答案每題五分，但是解題說理的評分標準為七個層次，總分數超過 100 分。答案正確固然重要，說理表達思考更是可貴，鼓勵學生嘗試錯誤、分享思路，了解困惑的迷思點，因此於結果分享時不加入分數的告知及評比。

得分	Level	解題說理表現
0	0	未作答
2	1	0：作答但無法判別
5	2	1：答案對（說明不完整）或 答案錯（簡單說明）
10	3	2：答案對（單一陳述）或 答案錯（使用語文或數學說明）
15	4	3：答案對（語文或數學說明）或 答案錯（語文、數學表示說明清楚）
20	5	4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）
25	6	5：答案對（語文、數學表示且說明清楚且完整）

七、 學生之各個選項表現分析比率：M159（賽車速度）

- ◆ 選項答對題數統計情形：小學六年級的答題看出，基本上可以回答二至三題，但也不乏有16%的學生選項判斷全部正確。

選項 答對題數	人數	比率	代表號碼
四題全對	5	16%	2、11、13、20、27
三題答對	7	22%	1、5、12、21、22、31、33
二題答對	12	38%	3、7、8、10、14、17、18、19、23、24、25、30
一題答對	6	19%	6、9、26、28、29、33
全錯	2	6%	15、16

- ◆ **各題選項選擇分析：**可以發現第二題、第三題的答題正確比率81%、75%相對較高。第一題的答題以傾向A、B、C選項，似乎題意有不清楚、不了解的情況。而第四題有嚴重性的干擾與混亂的情況，以E圖的影響最大。

問題 1：從起始線到軌道裡最長且平直部分的開始處，其大約距離為何？

選項	答題人數	比率	代表號碼
A：0.5 km	8	25%	3、9、15、16、17、26、28、31
B：1.5 km	12	38%	1、2、5、8、10、11、13、18、20、21、27、32
C：2.3 km	7	22%	7、14、19、22、23、25、30
D：2.6 km	3	9%	6、12、24
未作答	2	6%	29、33

問題 2：在跑第二圈期間，哪個地方速度最低？

選項	答題人數	比率	代表號碼
A：在起跑線	2	6%	9、16
B：約在0.8 km 處	0	0%	×
C：約在1.3 km 處	26	81%	1、2、3、5、6、7、10、11、12、13、14、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、30、31、32
D：約在軌道的一半	3	9%	8、15、29
未作答	1	3%	33

問題 3：你能說明在2.6 km到2.8 km之間的車速代表什麼意思嗎？

選項	答題人數	比率	代表號碼
A：車速維持不變	2	6%	10、16
B：車速增加	24	75%	1、2、3、7、8、9、11、12、13、14、17、19、20、21、22、23、24、25、27、29、30、31、32、33
C：車速減少	5	16%	6、15、18、26、28
D：無法由圖中判斷車速	0	0%	×
未作答	1	3%	5

問題 4：在此有五條軌道的圖形，沿著哪個軌道駕駛賽車，會繪出如前述的速度變化圖？S：起點

選項	答題人數	比率	代表號碼
A 圖	4	13%	1、16、24、32
B 圖	9	28%	2、5、11、12、13、20、22、27、31
C 圖	5	16%	7、19、26、29、30
D 圖	1	3%	17
E 圖	13	41%	3、6、8、9、10、14、15、18、21、23、25、28、33
未作答	0	0%	×

八、學生之解題說理表現結果：M159（賽車速度）

解題說理的平均分數在 Level3~4，但是超過 2/3 的人數是答對的，可見仍需要加強說理的能力。Level2~3 之間，答對人數在 1/3，因此可見再多練習將可讓表達再提升思考方式。

發現以第二題與第三題的解題說理表現較高，與選項答對人數較多，有相互呼應的情況。

第四題的題說理的平均數較第一題高，且發現第四題選項 E 圖的選答率達 41%，可見學生有解題的想法，但是卻是錯誤的，所以發生選項答對人數是最低的。

	解題說理平均分數	選項答對人數
第一題	9.1 (0~25)	12
第二題	13 (0~25)	26
第三題	13 (0~25)	24
第四題	9.3 (0~25)	9
第一~四題	44 (0~100)	

學生之解題說理表現結果發現：選項答對的學生在解題說理表現較佳。選項答對，則解題說理的表現也隨之較佳。

解題說理表現	第一題		第二題		第三題		第四題	
	選項答 對人數	表現 比率	選項答 對人數	表現 比率	選項答 對人數	表現 比率	選項答 對人數	表現 比率
未作答	1	8%	2	8%	0	0%	1	13%
0：作答但無法判別	3	25%	1	4%	2	8%	0	0%
1：答案對（說明不完整）	0	0%	0	0%	1	4%	0	0%
2：答案對（單一陳述）	2	17%	6	23%	4	17%	2	25%
3：答案對（語文或數學說明）	2	17%	6	23%	7	29%	1	13%
4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）	3	25%	6	23%	7	29%	2	25%
5：答案對（語文、數學表示且說明清楚且完整）	1	8%	5	19%	3	13%	3	38%
總計	12	100%	26	100%	24	100%	8	100%

問題 1：從起始線到軌道裡最長且平直部分的開始處，其大約距離為何？

解題說理表現	選項 答對 人數	表現 比率	選項 答錯 人數	選項 人數 總和	比率
未作答	1	8%	4	5	16%
0：作答但無法判別	3	25%	3	6	19%
1：答案對（說明不完整）或 答案錯（簡單說明）	0	0%	2	2	6%
2：答案對（單一陳述）或 答案錯（使用語文或數學說明）	2	17%	6	8	25%
3：答案對（語文或數學說明）或 答案錯（語文、數學表示說明清楚）	2	17%	5	7	22%
4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）	3	25%	0	3	9%
5：答案對（語文、數學表示且說明清楚 且完整）	1	8%	0	1	3%
總計	12	100%	20	32	100%

問題 2：在跑第二圈期間，哪個地方速度最低？

解題說理表現	選項 答對 人數	表現 比率	選項 答錯 人數	選項 人數 總和	比率
未作答	2	8%	2	4	13%
0：作答但無法判別	1	4%	3	4	13%
1：答案對（說明不完整）或 答案錯（簡單說明）	0	0%	0	0	0%
2：答案對（單一陳述）或 答案錯（使用語文或數學說明）	6	23%	1	7	22%
3：答案對（語文或數學說明）或 答案錯（語文、數學表示說明清楚）	6	23%	0	6	19%
4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）	6	23%	0	6	19%
5：答案對（語文、數學表示且說明清楚 且完整）	5	19%	0	5	16%
總計	26	100%	6	32	100%

問題 3：你能說明在2.6 km到2.8 km之間的車速代表什麼意思嗎？

解題說理表現	選項 答對 人數	表現 比率	選項 答錯 人數	選項 人數 總和	比率
未作答	0	0%	0	0	0%
0：作答但無法判別	2	8%	2	4	13%
1：答案對（說明不完整）或 答案錯（簡單說明）	1	4%	1	2	6%
2：答案對（單一陳述）或 答案錯（使用語文或數學說明）	4	17%	5	9	28%
3：答案對（語文或數學說明）或 答案錯（語文、數學表示說明清楚）	7	29%	0	7	22%
4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）	7	29%	0	7	22%
5：答案對（語文、數學表示且說明清楚 且完整）	3	13%	0	3	9%
總計	24	100%	8	32	100%

問題 4：在此有五條軌道的圖形：沿著哪個軌道駕駛賽車，會繪出如前述的速度變化圖？S：起點

解題說理表現	選項 答對 人數	表現 比率	選項 答錯 人數	選項 人數 總和	比率
未作答	1	13%	1	2	6%
0：作答但無法判別	0	0%	7	7	22%
1：答案對（說明不完整）或 答案錯（簡單說明）	0	0%	4	4	13%
2：答案對（單一陳述）或 答案錯（使用語文或數學說明）	2	25%	6	8	25%
3：答案對（語文或數學說明）或 答案錯（語文、數學表示說明清楚）	1	13%	4	5	16%
4：答案對（語文、數學表示且說明清楚）	2	25%	0	2	6%
5：答案對（語文、數學表示且說明清楚 且完整）	3	38%	0	3	9%
總計	8	100%	22	32	100%

九、學生之「解題類型分析」與「解題示例萃取」：M159（賽車速度）

問題 1：從起始線到軌道裡最長且平直部分的開始處，其大約距離為何？

選項	解題類型者	解題示例萃取
A：0.5 km	26	從 1.6km 到 2.2km 的軌道裡，是最長而且是最平直的， $2.2 - 1.6 = 0.6$ ，0.6km 大約是 0.5km。
	31	最平直且最長的開始處約是 1.8km，而尾端則是 2.3km。由此可知是 $2.3 - 1.8 = 0.5$ 。
B：1.5 km (正確答案)	20	從圖而直線中有三個直線的地方，而直線最長的地方在差不多 1.8km~2.2km 之間 1.5km 的地方雖然還不是直的但在選擇中 1.5km 最靠近 1.8km 而 0.5km 是第二長的直線起點 2.3km 和 2.6km 似乎代後面了，變成尾線了。
C：2.3 km	23	第一段平的是 0.6~1.1， $1.1 - 0.6 = 0.5$ 。第二段平的是 1.7~2.3， $2.3 - 1.7 = 0.6$ 。 $0.6 > 0.5$ ，所以最長且最平直的是在 2.2~2.4 中間，所以答案就很明顯是 2.3。

D: 2.6 km	6	到了最長平直的部分已經有 1.8km 了，還要加上轉彎的地方，加起來就大約是 2.6km。
	12	越直的線，代表越平直，所以在大約 1.7km~2.3km 的地方是最直的距離是 2.6km。

問題 2：在跑第二圈期間，哪個地方速度最低？

選項	解題類型者	解題示例萃取
A：在起跑線	16	起跑是 1.4 他是最低的。
B：約在 0.8 km 處	×	×
C：約在 1.3 km 處 (正確答案)	20	大彎的地方似乎比較慢，因為賽車中為了不被甩出去，所以一定會放慢。而且小彎的地方或許速度也會慢一點點，但可直接煞車打排檔應該就能轉彎了。
	26	1.2km 到 1.4km 的轉彎處，車子的速度降到 80km/h，所以這段距離的速度最低。
	23	第一次掉下來 90km/h，第二次掉下來 70km/h，第三次掉下來 120km/h，所以 $120(3) > 90(1) > 70(2)$ ，最小的是第二次，大約在 1.2~1.4 中間，所以只有 1.3 合格。
D：約在軌道的一半	8	用猜的
	29	$3 \div 2 = 1.5$

問題 3：你能說明在 2.6 km 到 2.8 km 之間的車速代表什麼意思嗎？

選項	解題類型者	解題示例萃取
A：車速維持不變	10	用想的
	16	2.6，2.8，差 0.2，速度不變。
B：車速增加 (正確答案)	20	如果直線的速度是最快的，那在直線前的彎道應該會衝刺而圖表上 2.6km~2.8km 中間有從低到高從 110km/h~160km/h 所以車速照推理來說是增加的。
	2	M2.6→2.8 為正即車速增加。
	33	100 (km/h) < 160 (km/h) 的速度，就因為 2.6km 是 100 (km/h)，2.8km 是 160 (km/h)，我才認為是 B 車速增加這個答案。

	22	其中有三個彎的圖有 BCD 是可能的，前圖的第二個彎最為彎曲，而 BCD 中的 B 第二個彎也較微彎曲，且 B 在第二個彎至第三個彎中間最長，所以我覺得答案是 B。
	5	開車時轉的角度越大，車速會越慢，可見一開始時要過一個小彎，第二次過彎時角度要大一點，第三次又是一個小的。
C：車速減少	28	因為到了轉彎的地方，車速會減少。
D：無法由圖中判斷車速	×	×

問題 4：在此有五條軌道的圖形：沿著哪個軌道駕駛賽車，會繪出如前述的速度變化圖？S：起點

選項	解題類型者	解題示例萃取
A 圖	24	因為它的圖形把它拉開較像。
B 圖 (正確答案)	20	因為圖中有三個大小不一的彎和長度不同的直線，所以一開始我就先選擇了 B 和 C 圖。C 圖的三角形似正三角形、直線的差距也不大，而 B 圖的彎大小不一、長度也不同，跟圖相似，所以我選擇 B。
	2	由三次減速可知轉三次彎，再由平直部分判斷可知為 B 或 C，由轉彎幅度可知為 B。
C 圖	30	速度變化圖中有共三個可能在彎道而減速的地方，B 圖 C 圖則是最有可能的。轉彎處的角度越大，速度變越慢，而 C 圖轉彎後最長、最平直的地方，就我判斷與速度變化圖最相符。
D 圖	17	(未回答)
E 圖	33	就是沿著速度變化圖的線來比較 E 圖的線啊！
	14	E 圖上方的軌道和上圖是一樣的。
	23	如果把下面剪掉，就會剩上面，上面的圖形就會和速度變化圖一樣了。
	18	因為長的很像。

十、分享與建議：

- (一)、 了解學生學習與開放性 PISA 題目的表現：學生的判斷能力是有的基本的物理認知與特性可以運用於日常生活中，因此在清楚的題意與語意的分析下學生仍可以達到應有的作答內容。
- (二)、 了解學生質性說明的學習思考能力與方式：透過學生先以紙筆方式的寫作，將數學思考邏輯判斷方式寫出，比寫出計算算式更有難度些，但是在透過未公布答案的公開討論分享後，學生很受肯定，因為是分享想法，以口頭說明的方式簡單多了，而且透過分享也找到相同的思考者，更是肯定、更愈急著發表，甚而私下要求再給寫作時間。
- (三)、 了解學生錯誤解題的思考模式與類型：透過質性的將解題類型分析評量後，能歸納出學生解題模式，雖然耗時又耗力，不符合經濟效益，但是再於了解學生的解題策略很有幫助。是想如果平日教學也如此一定能好好幫助學生了解自己的學習，但是這似乎又是現實生活的不可能任務僅能偶而為之。
- (四)、 讓學生能勇與於說明表達數學思考方式並以紙筆呈現：學生經由補充的 PISA 數學題目後，樂於挑戰與分享想法，並且迫不及待的想要更多的練習，是一件樂於學習的學習成果。
- (五)、 教師能以參考 QUASAR 方式進行評量與解題類型分析將解題說理的層次釐清分析：藉由釐清此次的補充資料目的是為了鼓勵呈現思考的脈絡及以紙筆方式呈現，因此與正式的學習評量測驗的評分方式迥異，主要以陳述的完整性及清楚性，再輔以正確性來評定分數。但是整個評分過程中是為主觀的認知評定，容易受時間、受評分員的影響，因此經常性的回顧及探討思量變成了十分重要的教師功課。

數學 PISA 試題評量——以五年級為例

高雄市旗津國小 陳幸永

壹、前言

擔任教學工作多年，透過「說數學」活動，筆者得以瞭解學生的學習歷程與思維活動；也讓低年級學生能從解題經驗中建立數學符號表徵。但從來沒有嘗試過紙筆評量、闖關活動以外的其他評量方式。PISA 評量的對象是 15 歲學生，評量目的是了解學生在數學、科學和閱讀三方面的素養和能力以及面對成人生活的準備度，是一項強調基礎素養與終身學習能力的國際性標準化評量。參加跨縣市「精進數學教學與命題工作坊」，認識了與傳統教學評量目標不同的 PISA 評量，於是，嘗試從 PISA 試題樣本中選取適合國小高年級學生的試題進行評量活動。

貳、評量目標

- 一、了解學生解決 PISA 評量開放性問題的解題表現。
- 二、了解每個學生在「木匠」問題與「蘋果」問題中，其數學解題與說理的能力。
- 三、了解全班學生在「木匠」問題與「蘋果」問題中，正確解題與錯誤解題之解題類型。

參、實施年級或適用對象

本示例實施年級與對象為高雄市旗津國小五年級 26 位學生。而本示例(蘋果問題、木匠問題)的題材原本是 PISA 針對全球 15 歲學生所設計的題目，但是因為本示例實施對象為國小五年級學生，尚未學習代數教材，因此，筆者在施測時將蘋果問題中關於蘋果樹數量與針葉樹數量的規律之代數表徵問題(問題 6)刪去。

肆、實施流程

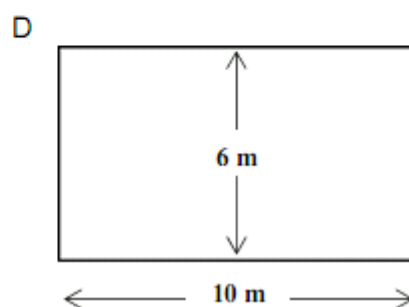
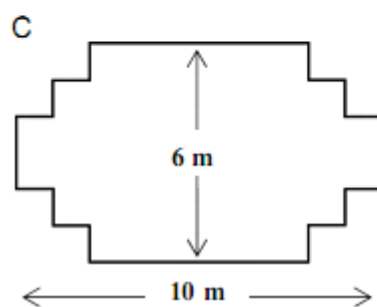
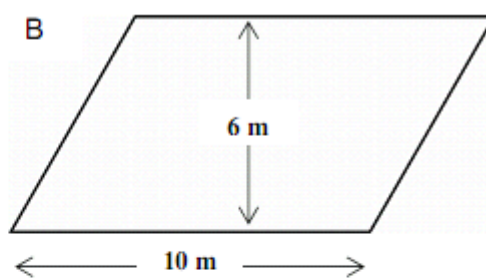
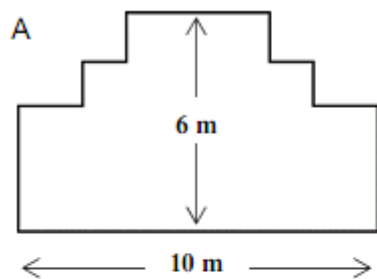
- 一、分析 PISA 範例題本、選定評量題目。
- 二、進行 PISA 紙筆評量。
- 三、以 PISA 評分規準分析學生解題表現。
- 四、補救教學與學生補充說明。
- 五、評量資料彙整。

伍、評量內容

本示例評量題組共二題，題目如下：

◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



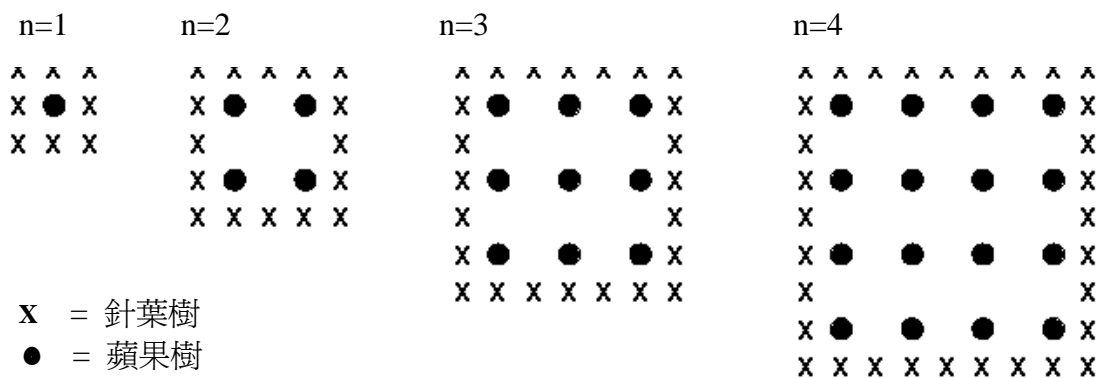
問題：上面花圃的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。

花圃設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	
B 設計	是 / 否	
C 設計	是 / 否	
D 設計	是 / 否	

◆◆◆◆◆ 蘋果 ◆◆◆◆◆

農夫將蘋果樹種在正方形的果園。為了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。

在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數(n)，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：



問題1：請完成下表的空格

n	蘋果樹數	針葉樹數
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。

陸、評量標準

第一題「木匠」問題 1 之 PISA 評量標準

評量標準
滿分 代號 2：答對四項。 A 設計 是 B 設計 否 C 設計 是 D 設計 是
部分分數 代號 1：答對三項。
零分 代號 0：答對二項或以下。
零分 代號 9：沒有作答

第一題「木匠」問題 2 之自訂評量標準

評量標準
滿分 代號 21：說理清楚
部分分數 代號 11：B、C、D 說明正確，僅 A 設計說明有誤 代號 12：A、C、D 說明正確，僅 B 設計說明有誤 代號 13：A、B、D 說明正確，僅 C 設計說明有誤 代號 14：A、B、C 說明正確，僅 D 設計說明有誤
零分 代號 01：僅 A 設計說明正確 代號 02：僅 B 設計說明正確 代號 03：僅 C 設計說明正確 代號 04：僅 D 設計說明正確 代號 05：ABCD 說明全誤
零分 代號 99：沒有作答

第二題「蘋果」問題 1 之 PISA 評量標準

評量標準																				
<p>滿分</p> <p>代號 21：7 格全對。</p> <table border="1" data-bbox="478 492 1125 784"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>			n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
<p>部分分數</p> <p>代號 11：n=2、3、4 時均答對，但 n=5 答錯一格或未作答</p> <ul style="list-style-type: none"> • 最後一格「40」答錯；其餘均正確。 • 「25」答錯；其餘均正確。 <p>代號 12：n=5 中的數量均答對，但在 n=2 或 3 或 4 中有一格答錯或未作答。</p>																				
<p>零分</p> <p>代號 01：n=2、3、4 時均答對，但 n=5 兩個空格全錯</p> <ul style="list-style-type: none"> • 「25」和「40」都答錯；其餘均正確。 <p>代號 02 其他答案</p> <p>代號 99：沒有作答</p>																				

第二題「蘋果」問題 2 之 PISA 評量標準

評量標準
<p>滿分</p> <p>代號 21：正確答案(蘋果樹數)，並做有效的解釋。例如：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 蘋果樹數為 $n \times n$，針葉樹數為 $8 \times n$，兩個公式都有因數 n，而蘋果樹有另一個 n，n 可以越來越大，但針葉樹另一個因數還是 8。所以蘋果樹數量增加的比較快。 • 蘋果樹數量增加的比較快，因為當 $n=8$ 時，就變為平方數。 • 蘋果樹數是二次函數。針葉樹是線性函數。所以蘋果樹數量會增加的比較快。 • 用作圖證明當 $n=8$ 之後，n^2 會大於 $8n$。 <p>[注意代號 21 的前提是，學生有寫出 n^2 和 $8n$ 的公式，並作代數的解釋]</p>

部分分數

代號 11：正確答案(蘋果樹)，以特例說明，或以表格的延伸進行說明。

- 蘋果樹數會快速增加，因為若我們使用表格（前頁），可以發現蘋果樹數量比針葉樹數量增加的更快。特別是在兩種樹數量一樣之後。
- 表格顯示蘋果樹數量增加得比較快。

或

正確答案(蘋果樹)，用部分證據來說明已知 n^2 與 $8n$ 的關係，但並沒有像代號 21

清楚地表達。

- $N > 8$ 之後的蘋果樹
- 在 8 列之後，蘋果樹數量會增加得比針葉樹數量快。
- 針葉樹，直到 8 列後，會有比較多的蘋果樹。

零分

代號 01：正確答案(蘋果樹)，但解釋缺乏、不充分或者錯誤。

- 蘋果樹
- 蘋果樹，因為它們種在內圍，比外圍的數量更多。
- 蘋果樹，因為他們被針葉樹包圍。

代號 02：其它答案

- 針葉樹
- 針葉樹，因為你每種 1 列蘋果樹，你需要再種很多針葉樹。
- 針葉樹，因為每種 1 棵蘋果樹就要種 8 棵針葉樹。
- 我不知道。

代號 99：沒有作答

柒、學生之解題表現分析

筆者以 PISA 試題樣本中的木匠問題與蘋果問題作施測，以紙筆評量方式，請學生將問題做法及想法寫在紙上。根據旗津國小五年級學生解題表現分析，如下表：

表 1 木匠問題的評量表現

	問題 1		問題 2 理由說明		
	百分比	百分比	百分比		
滿分 2 或 21	5	19%	4	15%	15%
部分分數 1 或 11	10	38%	0	0%	23%
部分分數 12			6	23%	
部分分數 13			0	0%	
部分分數 14			0	0%	
零分 0 或 01	10	38%	1	4%	58%
零分 02			1	4%	
零分 03			0	0%	
零分 04			9	35%	
零分 05			4	15%	
未作答	1	4%	1	4%	4%
總計	26	100%	26	100%	100%

「木匠」問題的整體評量表現為問題 1 滿分 19%、部分分數 39%、零分與未作答計 42%。本題為幾何題材、多重是非題，屬於 PISA 評量難度為水準 6，答對率為 20.2%。本班施測結果答對率為 19%。與 PISA 正是評量的結果相差不遠。

「木匠」問題屬於多重是非題，含四個「是/否」選項，原題目只要求寫出答案；為了能確實掌握學生解題思維，加入問題 2 請學生寫出「理由說明」之要求。問題 2 的評量表現為滿分 15%、部分分數 23%、零分與未作答 62%。

表 2 蘋果問題的評量表表現

	問題 1	百分比	問題 2	百分比
滿分 21	11	42.3%	1	3.8%
部分分數 11	9	34.6%	2	7.7%
部分分數 12	0	0.0%	0	0.0%
零分 01	2	7.7%	1	3.8%
零分 02	4	15.4%	19	73.1%
未作答	0	0.0%	3	11.5%
總計	26	100%	26	100%

「蘋果」問題的整體評量表表現為問題 1 滿分 42%、部分分數 35%、零分與未作答計 23%。問題 2 的評量表表現為滿分 3.8%、部分分數 7.7%、零分與未作答 88.5%。

本題為數量題材，本班施測結果問題 1 滿分(7 格全對)與部分分數(答對 6 格)合計 77%，但是在問題 2 的施測結果卻是滿分與部分分數合計僅 11.5%。從學生的解題表現可以得知，就數量問題的解題方面，學生可以解決問題 1，但是，問題 2 乃是針對問題 1 所得的答案做資料的解讀與判斷。原本 PISA 的評量試題在問題 1 與 2 之中還有一個問題是：「你可以用以下的 2 個公式來計算上面提到的蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：

$$\text{蘋果樹的數量} = n^2$$

$$\text{針葉樹的數量} = 8n$$

n 代表蘋果樹的列數

當 n 為某一個數值時，蘋果樹數量會等於針葉樹數量。找出 n 值，並寫出你的計算方法。」

由於施測的對象是國小五年級學生，尚未學習代數教材，所以，施測時便將此問題刪去。但是筆者在施測後，重新審視此一問題時，察覺這個問題是察覺蘋果樹與針葉樹數量何者增加較快的重要思考線索，本班在施測時刪去此題雖然可以避開學生尚未學習代數表徵的問題，卻也增加了問題2的難度。

捌、學生「解題類型」萃取示例

木匠問題

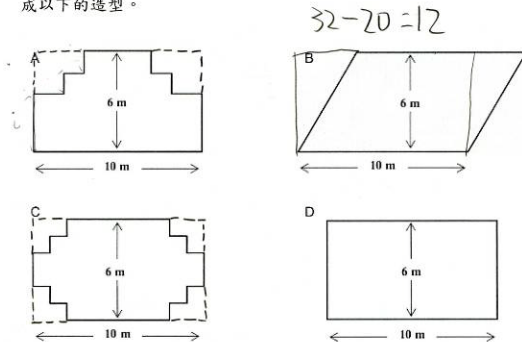
學生解題類型		說明															
答案正確、說明清晰	<p>S08 問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>$10+10+6+6=32$</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>$10+10+8+8 > 32$ (註：此設計有斜線)</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>$10+10+6+6=32$</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>$(10+6) \times 2 = 32$</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <p>在前面的(A)中 A-C 已完全補好，而 D 也可，而 B 是有 2 個 10 但有 2 個斜線 (斜線比直線長) 40</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$	B 設計	是 / 否	$10+10+8+8 > 32$ (註：此設計有斜線)	C 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$	D 設計	是 / 否	$(10+6) \times 2 = 32$	<ul style="list-style-type: none"> ● 透過圖像與算式可以清楚看出解題思維脈絡。 ● 在全班討論過後，主動補充說明為何斜線會比直線長。
	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由														
A 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$															
B 設計	是 / 否	$10+10+8+8 > 32$ (註：此設計有斜線)															
C 設計	是 / 否	$10+10+6+6=32$															
D 設計	是 / 否	$(10+6) \times 2 = 32$															
<p>S09 問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為左右的線多出來</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為斜線比直線長</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為左右的線多出來</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>算周長</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為左右的線多出來	B 設計	是 / 否	因為斜線比直線長	C 設計	是 / 否	因為左右的線多出來	D 設計	是 / 否	算周長	<ul style="list-style-type: none"> ● 透過圖像可以清楚看出解題思維脈絡。 	
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為左右的線多出來															
B 設計	是 / 否	因為斜線比直線長															
C 設計	是 / 否	因為左右的線多出來															
D 設計	是 / 否	算周長															

學生解題類型

說明

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



A設計：因為左右的線移出來再算周長。

- 在全班討論過後，補充說明不規則形狀的線段移出後，就如 D 設計的長方形周長一樣。

S11

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	A 的圖形可以把凹進去的地方把它拉出來算，算出來就是 32m
B 設計	是 / 否	B 的圖形要先把斜的部分拉直，算總長度，多算 32m 所以是
C 設計	是 / 否	C 的圖形也要把凹進去的部分拉出來算，也是 32m
D 設計	是 / 否	D 的圖形可以直接算周長，算出來是 32m

- 解題正確而且說理清楚。

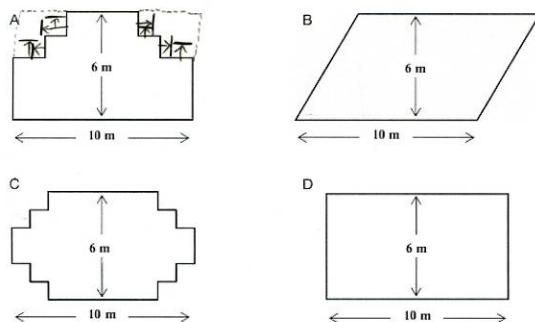
S12

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	因為如果把凹進去的線條全都推出來，就是，然後寬是 6 公尺長是 10 公尺，再用 10+6 就可以了
B 設計	是 / 否	因為我用直尺做例子，我發現如果是 [完整的] 其他的直線，變成其他的角度的話，線的長度也會不同
C 設計	是 / 否	同上 (A)
D 設計	是 / 否	因為寬是 6 公尺長是 10 公尺，再長 + 寬 $\times 2$ ，也就是 $(6+10) \times 2$

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



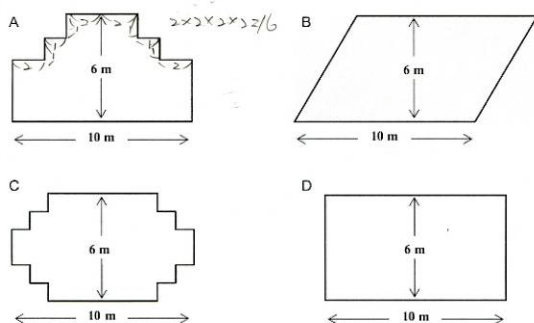
- 解題正確而且說理清楚。
- 善用工具 (尺) 來證明 B 設計的周長超過 32 公尺。

學生解題類型		說明															
答案正確、說明有誤	<p>S28 問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 $10+10+6+6=32$ 所以可以。 ✓ 5</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>是 / 否 ? ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>是一個完整的就算圍成就好了。 ✓ 5</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在水園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>A</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>B</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>C</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D</p> </div> </div> <p>B 設計 否 因為是平行四邊形 高並非邊長。 ✓ 5</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 $10+10+6+6=32$ 所以可以。 ✓ 5	B 設計	是 / 否	是 / 否 ? ✓ 2-2	C 設計	是 / 否	因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5	D 設計	是 / 否	是一個完整的就算圍成就好了。 ✓ 5	<ul style="list-style-type: none"> ● A、C、D 設計的周長說理正確，B 設計則是解題正確，但缺乏理由說明。 ● 透過討論活動後，能清楚說明圖形中的高並非邊長。
	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由														
	A 設計	是 / 否	因為長跟寬分別是 10m 和 6m，所以 $10+10+6+6=32$ 所以可以。 ✓ 5														
B 設計	是 / 否	是 / 否 ? ✓ 2-2															
C 設計	是 / 否	因為把凹進去的部分拉去來就形成了完整的了。 ✓ 5															
D 設計	是 / 否	是一個完整的就算圍成就好了。 ✓ 5															
<p>S03 問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。 ✓ 1</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為 $6 \times 2 + 10 \times 2$ 就會等於 32，所以可以。 ✓ 1</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。 ✓ 1</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>四全部加起來等於 32 ✓ 5</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。 ✓ 1	B 設計	是 / 否	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2$ 就會等於 32，所以可以。 ✓ 1	C 設計	是 / 否	因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。 ✓ 1	D 設計	是 / 否	四全部加起來等於 32 ✓ 5	<ul style="list-style-type: none"> ● D 設計長方形周長解題說明正確，但對於非長方形的 A 和 C 則無法從圖像上的線索求得其周長。 ● B 設計誤將平行四邊形的 (底+高) $\times 2$ 當做周長。 	
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為有一條線不是 10 就沒辦法組成 32m 的邊界。 ✓ 1															
B 設計	是 / 否	因為 $6 \times 2 + 10 \times 2$ 就會等於 32，所以可以。 ✓ 1															
C 設計	是 / 否	因為只有一條不是 10 就不能組合，所以兩條都不是就絕對不行組合。 ✓ 1															
D 設計	是 / 否	四全部加起來等於 32 ✓ 5															
<p>S04 問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>因為 $2 \times 2 \times 2 = 16 / 6 \times 2 = 32$ ✓ 2-1</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>都不能算 ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>不會算 ✓ 2-2</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>不會算 ✓ 1</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否	因為 $2 \times 2 \times 2 = 16 / 6 \times 2 = 32$ ✓ 2-1	B 設計	是 / 否	都不能算 ✓ 2-2	C 設計	是 / 否	不會算 ✓ 2-2	D 設計	是 / 否	不會算 ✓ 1	<ul style="list-style-type: none"> ● 邊長周長概念不清，對於圖像中的資訊缺乏解讀能力。 	
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否	因為 $2 \times 2 \times 2 = 16 / 6 \times 2 = 32$ ✓ 2-1															
B 設計	是 / 否	都不能算 ✓ 2-2															
C 設計	是 / 否	不會算 ✓ 2-2															
D 設計	是 / 否	不會算 ✓ 1															

學生解題類型

說明

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



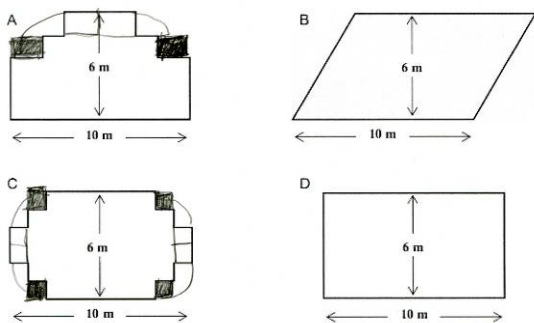
S05

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	因為他有缺很多塊木板所以沒辦法
B 設計	是 / 否	因為B形跟D形的形狀是一樣，而且B形沒有缺木板所以可以圍成
C 設計	是 / 否	他缺太多木板所以不好算
D 設計	是 / 否	他是完全沒有缺所以很好算

◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



S06

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	先把它凹進去的地方往上推，就會形成一個長方形，再算出周長，結果是 32 公尺。
B 設計	是 / 否	先把設計圖右邊凹出來的地方畫一條線，變成一個三角形，把它凹的地方再移出來，凹出來的地方，剛好一樣，再算出周長。
C 設計	是 / 否	先把它凹進去的地方推出來，就會形成一個長方形，再算出周長，結果是 32 公尺。
D 設計	是 / 否	算出周長 32 公尺。

● 從「缺很多塊」的描述，可以看出 S05 將面積與周長混淆了。

● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。

學生解題類型		說明															
◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆																	
<p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$10 \times 2 = 20$ $6 \times 2 = 12$ $20 + 12 = 32$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$10 + 6 = 16$ $16 \times 2 = 32$</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>$10 + 6 = 16$ $16 \times 2 = 32$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$10 + 6 = 16$ $16 \times 2 = 32$</p> </div> </div>																	
S07	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>把凹陷的假想成是突出也是完整的。 5</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>將其中一邊切開補到另一邊不完整的，就跟 (D) 一樣了。 5</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>跟 (A) 的解釋相同。 5</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>本來就是完整的，只要(長x寬=2)就好了。 5</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> </div> </div> <p style="margin-top: 10px;">B 設計是 (否) 它的斜線已經過 6m 以上，所以擁有的 32m 木板不能圍起超過 32m 的 B 設計圖。 5</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	(是) / 否	把凹陷的假想成是突出也是完整的。 5	B 設計	(是) / 否	將其中一邊切開補到另一邊不完整的，就跟 (D) 一樣了。 5	C 設計	(是) / 否	跟 (A) 的解釋相同。 5	D 設計	(是) / 否	本來就是完整的，只要(長x寬=2)就好了。 5	<p>● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。</p>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	(是) / 否	把凹陷的假想成是突出也是完整的。 5															
B 設計	(是) / 否	將其中一邊切開補到另一邊不完整的，就跟 (D) 一樣了。 5															
C 設計	(是) / 否	跟 (A) 的解釋相同。 5															
D 設計	(是) / 否	本來就是完整的，只要(長x寬=2)就好了。 5															
S10	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>我是用周長來算，因為他的圖(圖) 5</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>我覺得用平行四邊形把(圖) 5</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>我是用周長來算。 1</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td style="text-align: center;">(是) / 否</td> <td>我用的面積公式長x寬。 1</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	(是) / 否	我是用周長來算，因為他的圖(圖) 5	B 設計	(是) / 否	我覺得用平行四邊形把(圖) 5	C 設計	(是) / 否	我是用周長來算。 1	D 設計	(是) / 否	我用的面積公式長x寬。 1	<p>● 從 B 設計的說明與算式可以看出 S10 不僅誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等，更把面積當做周長。</p>
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	(是) / 否	我是用周長來算，因為他的圖(圖) 5															
B 設計	(是) / 否	我覺得用平行四邊形把(圖) 5															
C 設計	(是) / 否	我是用周長來算。 1															
D 設計	(是) / 否	我用的面積公式長x寬。 1															

學生解題類型		說明															
	<p align="center">◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p>																
S18	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>花園設計</th> <th>是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th>請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td>是 / 否</td> <td></td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>把它用正就會 D 是一樣的</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td>是 / 否</td> <td></td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td>是 / 否</td> <td>$2 \times (6 \times 2) + (10 \times 2) = 12 + 20 = 32$</td> </tr> </tbody> </table> <p align="center">◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <p>1. 是，把它剪成一半再把它合起來算算看。 2. 否，把它變成方形之後再看看它的周長有沒 32 公尺。 3. 是，先把所空的凹進去補起來算完之後再減掉。</p>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否		B 設計	是 / 否	把它用正就會 D 是一樣的	C 設計	是 / 否		D 設計	是 / 否	$2 \times (6 \times 2) + (10 \times 2) = 12 + 20 = 32$	<ul style="list-style-type: none"> ● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。 ● 事後的補充說明，面積與長度概念仍未澄清。
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由															
A 設計	是 / 否																
B 設計	是 / 否	把它用正就會 D 是一樣的															
C 設計	是 / 否																
D 設計	是 / 否	$2 \times (6 \times 2) + (10 \times 2) = 12 + 20 = 32$															

學生解題類型

說明

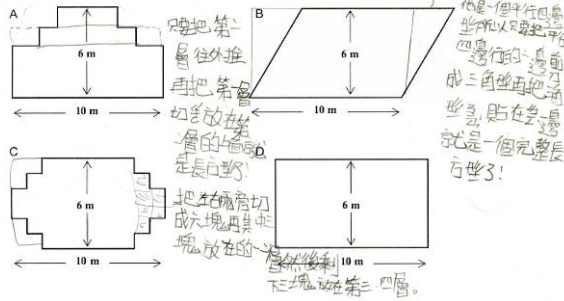
S19	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">花園設計</th> <th style="width: 20%;">是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th style="width: 65%;">請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td style="text-align: center;">是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否</td> <td>因為 A 可以移到 D 的位置，B 移到 E 的位置。 $(6+10) \times 2 = 32$</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td>因為 $(6+10) \times 2 = 32$</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td style="text-align: center;">是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否</td> <td>因為</td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td>因為 $(6+10) \times 2 = 32$</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">◆◆◆◆◆ 木 匠 ◆◆◆◆◆</p> <p>木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>A</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>B</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>C</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>D</p> </div> </div> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tbody> <tr> <td style="width: 15%;">A 設計</td> <td style="width: 20%; text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td style="width: 65%;">跟前面的理由一樣</td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td style="text-align: center;">是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否</td> <td>跟前面的理由一樣</td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td>跟前面的理由一樣</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	因為 A 可以移到 D 的位置，B 移到 E 的位置。 $(6+10) \times 2 = 32$	B 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 $(6+10) \times 2 = 32$	C 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	因為	D 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 $(6+10) \times 2 = 32$	A 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	跟前面的理由一樣	B 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	跟前面的理由一樣	C 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	跟前面的理由一樣	<ul style="list-style-type: none"> ● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。 ● 從 A 設計的說明可以看出，將面積誤為周長。
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由																								
A 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	因為 A 可以移到 D 的位置，B 移到 E 的位置。 $(6+10) \times 2 = 32$																								
B 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 $(6+10) \times 2 = 32$																								
C 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	因為																								
D 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 $(6+10) \times 2 = 32$																								
A 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	跟前面的理由一樣																								
B 設計	是 / <input checked="" type="checkbox"/> 否	跟前面的理由一樣																								
C 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	跟前面的理由一樣																								
S20	<p>問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">花園設計</th> <th style="width: 20%;">是否能用長度 32 公尺的木板圍成</th> <th style="width: 65%;">請說明你的理由</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 設計</td> <td style="text-align: center;">是 / 否</td> <td></td> </tr> <tr> <td>B 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td></td> </tr> <tr> <td>C 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td></td> </tr> <tr> <td>D 設計</td> <td style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否</td> <td>因為 D 是長方形，所以是： $(10+6) \times 2 = 32$</td> </tr> </tbody> </table>	花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由	A 設計	是 / 否		B 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否		C 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否		D 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 D 是長方形，所以是： $(10+6) \times 2 = 32$	<ul style="list-style-type: none"> ● 從學生事後的補充說明可以看出原先對面積與長度的基本定義是混淆的，這也是多數學生解題錯誤的主因。 									
花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由																								
A 設計	是 / 否																									
B 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否																									
C 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否																									
D 設計	<input checked="" type="checkbox"/> 是 / 否	因為 D 是長方形，所以是： $(10+6) \times 2 = 32$																								

學生解題類型

說明

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



我之先已以為邊界就面積，結果經過老師的講解後我才知道原來邊界是指周長。

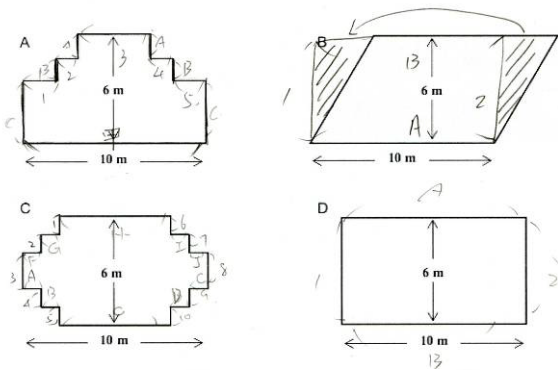
S27

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圈出是或否。

花園設計	是否可用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	左右的 A B C 加起來等於 12 而在下 A 加上 1, 2, 3, 4, 5 等於 20 而兩邊加起來等於 32
B 設計	是 / 否	把左邊的移到右邊而 1, 2 加起來等於 12 而 A B 加起來等於 20 而 12 加 20 等於 32
C 設計	是 / 否	把 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 加起來等於 55 而 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J 加起來等於 20 而 55 加 20 等於 75
D 設計	是 / 否	把 1, 2 加起來等於 12 而 A B 加起來等於 20 而 12 加 20 等於 32

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要在花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型。



A: 把左右邊的 A, B, C 加起來等於 12 而在把上 1, 2, 3, 4, 5 加下甲等於 20 而在把 12 加 20 等於 32。

B: 它的高是 6，不過平行四邊形的直線一定比 6 長，所以一定不可能是 32。

● 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。

● 在全班討論過後，補充說明 B 設計中的高不式邊長，而邊長的斜線會比高的直線還長。

學生解題類型

說明

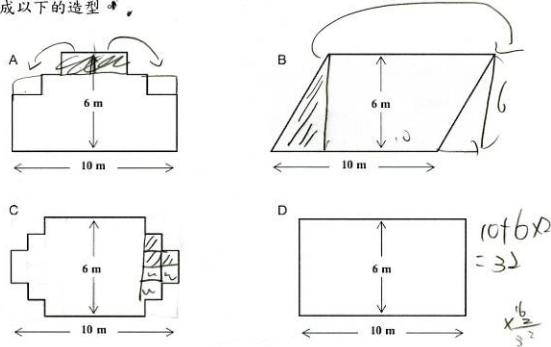
S29

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	先長境在乘 2 就是 32 的 2-2
B 設計	是 / 否	先把一塊可以補在右邊的一塊剪下看此 1 和右邊的一塊剪下看此 1 下面也是一樣是在左邊 2-2
C 設計	是 / 否	可以直接算不用補也不用剪 5

◆◆◆◆◆ 木匠 ◆◆◆◆◆

木匠有 32 公尺的木材，想要的花園周圍做邊界。他考慮將花園設計成以下的造型：



- 從 B 設計的說明可以看出，誤將平行四邊形 B 與長方形 D 等積異形當做周長相等。
- 雖然 A、C 設計學生的解答是正確的，但從圖象上看來，仍然是與 B 設計相同的迷思概念：將面積誤為周長。

S30

問題：上面花園的設計是否可以用長度 32 公尺的木板來圍成，在下表中的每一種設計圖出是或否。

花園設計	是否能用長度 32 公尺的木板圍成	請說明你的理由
A 設計	是 / 否	因為把有直角的也當成 2-2
B 設計	是 / 否	長度不同 1
C 設計	是 / 否	因為把有直角的也當成 2-2
D 設計	是 / 否	$(10+6) \times 2 = 32$ 互相平行 3

B 設計是否，因為長度不同

●

蘋果問題

學生解題類型		說明																		
答案正確、說明清晰	<p>S07 問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>12</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹請解釋你的想法。</p> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>A 蘋果樹 A 蘋果樹的規是配乘自己，針葉樹是8乘n數。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	12	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 能夠自行延伸表格，將 n 推算到 9，因而能對問題 2 有正確的闡述。 ● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 $N \times N$ (自己乘自己) 和 $N \times 8$ (8 乘 N)。 ● 但缺乏對蘋果數增加比較快的說明。
	n	蘋果樹數	針葉樹數																	
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	12	32																		
5	25	40																		
<p>S08 問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>h? 是把自己配如 5 的話 $19+2=11$ $x=18+0$ 會把上一個加 2 如 $n3-n4$ 的是 $n2-n3$ 的 19 而 x 增加 8 $=n \times$ 的 $x \times x =$ 的 x 的 x (也是 3, 5, 7, 9, 11, ...) $x = n \times$ 的 $x \times 8 = x$ 的 x (也就是加 8)</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 能發現蘋果樹的增加率的規則 (+3、+5、+7、+9)，並且發現每次增加的數量都是前一次增加數量再 +2，而針葉樹每次增加的數量是固定的都是 +8。 ● 從表格中可以知道 $n = 5$ 蘋果樹的數量增加 9 比針葉樹數量增加 8 多 1。 ● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 $X \times X$ 和 $X \times 8$。 	
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
答案正確、說	<p>S27 問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 雖然問題 1 中有 1 格算錯，但能發現種樹的規則：「把原來的針葉樹變成蘋果樹，然後再把蘋果樹的周圍種針葉樹。」 ● 能正確判斷出蘋果樹數量增加比較快。
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		

學生解題類型		說明																		
明有誤	<p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>蘋果樹</p> <p>把原本的針葉樹變成蘋果樹, 然後在把蘋果樹的周圍種針葉樹</p> <p>如果5排的話算式應是「5×5」= 25</p> <p>所以答是 25 棵</p>																			
S05	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>① 因為為了不要讓蘋果樹被吹倒所以農夫就種很多針葉樹</p> <p>② 也是因為針葉樹增加得很快</p> <p>A 針葉樹</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 從表格中針葉樹的數量比蘋果樹的數量大, 誤以為針葉樹增加得快, 由此可知學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S06	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>答: 針葉樹。</p> <p>因為如果蘋果樹增加的比較快的話, 就表示蘋果樹比較多, 這樣的話針葉樹就無法種在周圍。</p> <p>答: 蘋果樹。</p> <p>因為蘋果樹是以平數的方式增加, 針葉樹是以8的倍數增加, 如果蘋果樹增加到61棵, 針葉樹的數量就會增加到72棵, 如此一來蘋果樹的數量就會比針葉樹多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 從「如果蘋果樹增加的比較快的話, 就表示蘋果樹比較多」可知以為總數較多就是增加得比較快。 ● 從「……蘋果樹比較多, 這樣的話針葉樹就無法種在周圍。」可以看出誤以為外面的樹木數量會比裡面的樹木數量多。 ● 透過評量後得討論活動, 澄清「增加得比較快」的意義, 但S06仍以總量大當做「增加得比較快」的判斷依據。
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		

學生解題類型		說明																		
S09	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>的 $n \times n$、$n2 \times 2$、$n3 \times 3$、$n4 \times 4$、$n5 \times 5$，針葉樹的數量，蘋果樹的 $n2 \times 8$、$n3 \times 8$、$n4 \times 8$、$n5 \times 8$。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	<ul style="list-style-type: none"> ● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 $X \times X$ 和 $X \times 8$。 ● 從表格中針葉樹的數量比蘋果樹的數量大，誤以為針葉樹增加得快，由此可知學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S12	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1×1</td> <td>8 8×1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4 2×2</td> <td>16 8×2</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9 3×3</td> <td>24 8×3</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16 4×4</td> <td>32 8×4</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25 5×5</td> <td>40 8×5</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>① 我覺得是針葉樹 ② 因為針葉樹要保護蘋果樹，所以針葉樹會比較多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1 1×1	8 8×1	2	4 2×2	16 8×2	3	9 3×3	24 8×3	4	16 4×4	32 8×4	5	25 5×5	40 8×5	<ul style="list-style-type: none"> ● 能發現蘋果樹與針葉樹的數量變化規律，並且能將蘋果樹與針葉樹的數量表徵為 $X \times X$ 和 $X \times 8$。 ● 即使能將數量推算到 $n=9$，但仍然無法判斷這些數字所代表的意義，由此可知學生並不瞭解增加比較快的意義為何。這是本班多數學生普遍的問題點。 ● 從「因為針葉樹要保護蘋果樹，所以針葉樹比較多。」的說明，可以知道 S12 注意到針葉樹單邊的數量比蘋果樹單邊的數量多，卻沒有思考到二者總量與哪一個的數量增加得比較快？
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1 1×1	8 8×1																		
2	4 2×2	16 8×2																		
3	9 3×3	24 8×3																		
4	16 4×4	32 8×4																		
5	25 5×5	40 8×5																		

學生解題類型

說明

S21	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>因為我覺得針葉木樹長的比較快。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	40	●
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	40																		
S26	<p>◆◆◆◆◆ 蘋果 ◆◆◆◆◆</p> <p>農夫將蘋果樹種在正方形的果園。為了保護蘋果樹不怕風吹，他在蘋果樹的周圍種針葉樹。</p> <p>在下圖裡，你可以看到農夫所種植蘋果樹的列數(n)，和蘋果樹數量及針葉樹數量的規律：</p> <p>n=1 n=2 n=3 n=4 h=5</p> <p>x = 針葉樹 ● = 蘋果樹</p> <p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>$4 \times 4 = 16$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>$9 \times 2 + 6 = 24$</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>$16 \times 2 = 32$</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>$25 \times 1 + 15 = 40$</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2：若農夫想要種更多列，做一個更大的果園，當農夫將果園擴大時，那一種樹會增加得比較快？是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量？請解釋你的想法。</p> <p>① 針葉木樹</p> <p>② 因為問題1我在做答時發現了兩數都有在變化而針葉樹的變化愈變愈多，而蘋果樹的數量都是相差8。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	$4 \times 4 = 16$	3	9	$9 \times 2 + 6 = 24$	4	16	$16 \times 2 = 32$	5	25	$25 \times 1 + 15 = 40$	●
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	$4 \times 4 = 16$																		
3	9	$9 \times 2 + 6 = 24$																		
4	16	$16 \times 2 = 32$																		
5	25	$25 \times 1 + 15 = 40$																		
答案錯誤	<p>問題1：請完成下表的空格</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	25	50	●
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	25	50																		

學生解題類型		說明																		
	<p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>針葉樹的數量</p> <p>因為針葉樹是在保護蘋果樹, 所以針葉樹的數量當然會比較多。下圖</p> <p>A: 5是40, 把針葉樹加8就OK了。</p>																			
S10	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>12</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>18</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>A ① 針葉樹 ② 針葉樹</p> <p>解釋: 如果是種一棵蘋果樹四周都有針葉樹, 因此針葉樹比蘋果多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	12	32	5	18	40	
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	12	32																		
5	18	40																		
S19	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>20</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table> <p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>1. 針葉樹</p> <p>2. 因為針葉樹的數量1到4棵都是8的倍數, 所以針葉樹的列數比蘋果樹的列數多。</p>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	20	40	
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	20	40																		
S25	<p>問題1: 請完成下表的空格</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>蘋果樹數</th> <th>針葉樹數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> <td>32</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>23</td> <td>40</td> </tr> </tbody> </table>	n	蘋果樹數	針葉樹數	1	1	8	2	4	16	3	9	24	4	16	32	5	23	40	
n	蘋果樹數	針葉樹數																		
1	1	8																		
2	4	16																		
3	9	24																		
4	16	32																		
5	23	40																		

學生解題類型		說明
	<p>問題2: 若農夫想要種更多列, 做一個更大的果園, 當農夫將果園擴大時, 那一種樹會增加得比較快? 是蘋果樹的數量或是針葉樹的數量? 請解釋你的想法。</p> <p>A: ① 因為蘋果樹被針葉樹圍住所以蘋果樹數量一增加外圍的針葉樹也會增加 如果蘋果樹有4棵, 針葉樹就會有16棵</p> <p>A: 20 2. A: ② 因為蘋果樹多針葉樹就會越多 蘋果樹越少針葉樹就會越少。 2-1 剛剛我太緊張了</p>	

玖、教學省思

筆者第一次看到 PISA 試題，乍看之下覺得試題很難，因為這是一種與傳統以學科知識為中心的評量方式完全不同的評量。試題的敘寫方式乍看繁瑣冗長，其中的開放性問題是正規教育中少見的問題題型。

為了這次評量仔細的看了試題樣本，發覺題目好像又沒有預期中的那麼困難。解決這些問題所需要的數學知識不見得是非常高深的數學知識；但是，除了這些數學知識之外，困難點在於是否具備運用課堂中所習得的數學知識來解決問題的數學能力素養。

施測之後從學生的解題表現發現本班學生僅 15%(4 人)在木匠問題中的解題說理正確且清楚。而錯誤的說理大致上可分為兩類：一是誤將等積異形的面積相同當做周長也相同，也就是面積與周長的意義混淆了。另一類是誤將平行四邊形的高當作是斜邊。在施測後針對學生的迷思概念進行討論活動，有不少學生因此而得以澄清其迷思概念，但仍有幾個學生對於面積與周長的概念仍然模糊。

整體而言，筆者發覺適當選用 PISA 試題讓學生練習解決非例行

性問題，並增加解題說明的訓練，對於學生的解題能力與思維活動說明都有很大的幫助。教師更可從分析學生的解題表現中發現學生的迷思概念，進而能透過補救教學討論活動去澄清學生的迷思概念。

數學 QUASAR 紙筆認知評量——以五年級為例

雲林縣數學輔導團輔導員-李健生、陳秀冠

一、前言

QUASAR(Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning)計畫使用種種評量來評估學生是否達到推理、解題、溝通之數學教學目標，包括易於大團體實施的學生紙筆認知評量；易於班級教學實施的教學導向作業，像是合作學習、個別操作的評量；以及針對重要態度、信念和性向的非認知評量。

本報告採用 PISA 2009 的階梯樣式及網路通訊兩題試題，運用改良後 QUASAR 的評量標準(表 3 所示)對本校五年級已班 34 位同學加以施測，測驗時間 30 分鐘。

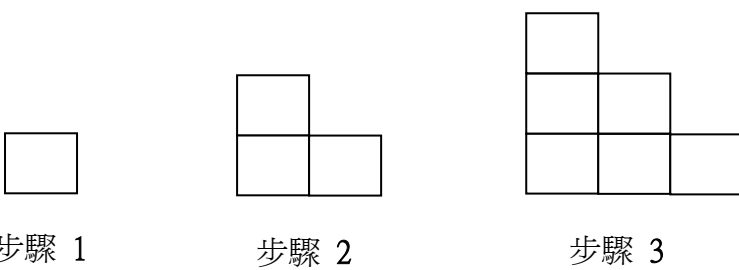
二、實施年級或或適用對象

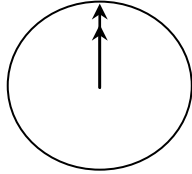
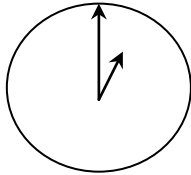
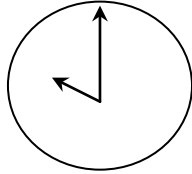
實施對象為雲林縣立仁國小五年級 34 位學生。

三、評量內容

評量內容包括階梯樣式、網路通訊兩題。如表 1。

表 1 QUASAR 認知評量題目

階梯樣式	<p>1. <u>子明</u>用方塊作出一個階梯的樣式。他的步驟如下。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"> 步驟 1 步驟 2 步驟 3 </p> <p>如用你所看到的，他在步驟 1 使用了一個方塊，在步驟 2 使用了三個方塊，以及在步驟 3 使用了六個方塊。</p> <p>請問在步驟 4 時，他應該會使用多少個方塊？</p> <p>請把解題想法以文字(圖形)詳細記下來。</p>
網路通訊	<p>2. <u>馬克</u>(來自<u>澳洲雪梨</u>)和<u>漢斯</u>(來自<u>德國柏林</u>)經常使用網路聊天。他們必須同時登錄網路才能開始聊天。</p> <p>為了能夠找個合適的聊天時間，<u>馬克</u>查詢世界各地的時間如下：</p>

			
	<p>格林威治 午夜 12 點</p>	<p>柏林 上午 1 點</p>	<p>雪梨 上午 10 點</p>
	<p>當雪梨時間是下午 7 點時，柏林是幾點？ 請把解題想法以文字詳細記下來。</p>		

四、評量標準

QUASAR 認知評量的特色在於評分規準的擬定，其評分規準分為 Level 1 到 5，原版之評分規準，如表 2，其中 Level 3 的評分規準為：答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明。由於筆者已將評量試卷樣貌作了修正，加了說理(想法)一欄，因此，學生留下空白沒有透過文字或圖形加以說明的可能性會降低，倒是將算式直接翻譯成文字或文字說理簡略不清楚的情況將大增，此外，也有可能產生答案正確，但計算過程錯誤或文字說理錯誤的情況，所以，筆者在評分規準上作了一些修正，如表 3。

表 2 QUASAR 評分規準原版

Level	評 分 規 準
Level 5	答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確。
Level 4	答案正確，計算過程和文字說明完整或圖形說明正確，但不夠完整。
Level 3	答案正確，計算過程正確，但無文字或圖形說明。
Level 2	答案不正確，但包含正確的數學推理；或只有一正確答案而無計算過程。
Level 1	嘗試回答。

表 3 QUASAR 評分新標準

說理 答案	過程	說理(文字或 圖形)	評分標準	Level
正確	✓	✓	答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。	Level 5
	✓	✓	答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。	Level 4
	✓	×	答案正確，計算過程正確，文字說理錯誤或無文字說理。	Level 3
	×	✓	答案正確，計算過程錯誤或無計算過程，但包含正確的數學推理。	
不正確	部份	×	答案不正確，部份計算過程正確，文字說理錯誤或無文字說理。	Level 2
	×	部份	答案不正確，計算過程錯誤或無計算過程，部份文字說理正確。	
	×	×	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。	Level 1

五、學生之解題表現分析

1、解題說理表現分析

表 4 階梯樣式之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
階梯樣式	24	10	16	6	2	3	7	34
百分比	71	29	47	17	7	9	20	100

由表 4，得知階梯樣式之整體評量表現為正確解題有 71%，錯誤解題 29%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 64%，也就是有 36% 的學生不太會說理。

表 5 網路通訊之評量表現

	解題		解題說理 Level 1~5					
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	合計
網路通訊	12	22	12	0	0	6	16	34
百分比	35	65	35	0	0	17	48	100

由表 5，得知網路通訊之整體評量表現為正確解題有 35%，錯誤解題 65%，其中解題說理表現達到 Level 5 和 4 的有 35%，也就是有 65% 的學生不太會說理。

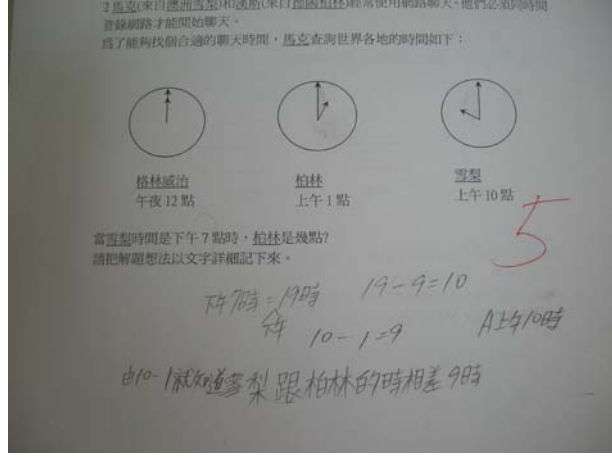
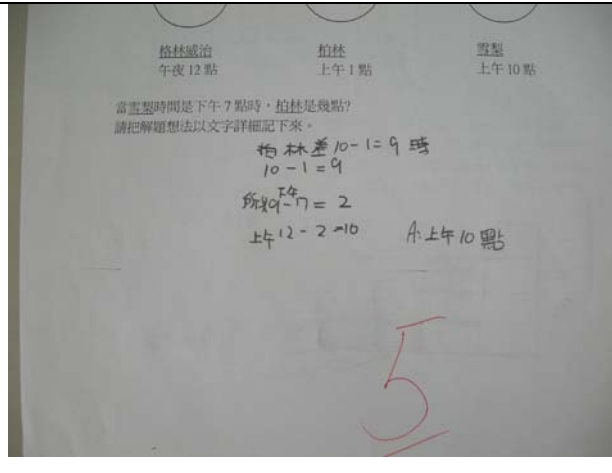
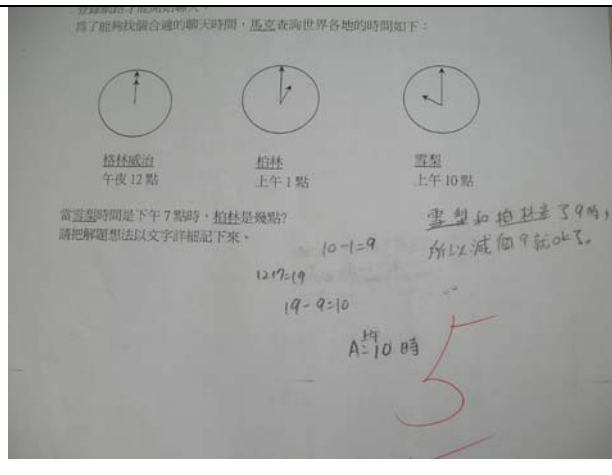
2、學生之解題示例萃取

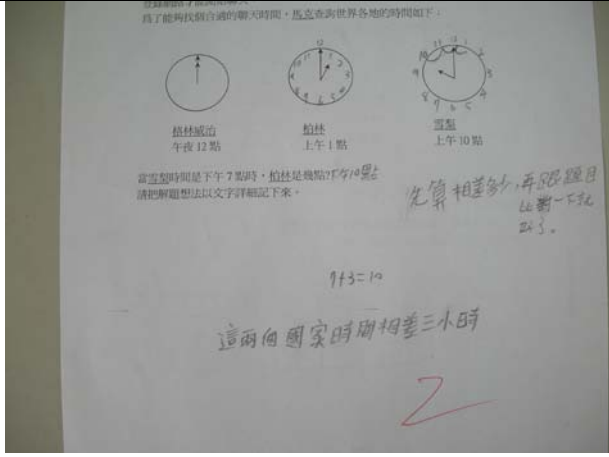
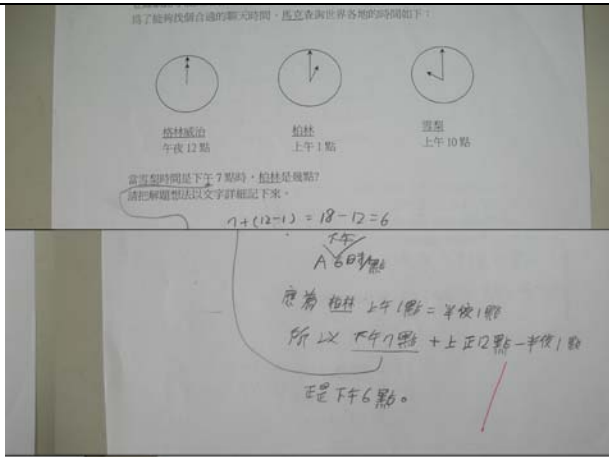
表 6 階梯樣式之示例萃取

<p>Level 5 (s21)</p>		<p>答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。</p>
<p>Level 4 (s13)</p>		<p>答案正確，計算過程和文字說理正確，但不夠完整。</p>

<p>Level 3 (s35)</p>	<p>步驟 1 步驟 2 步驟 3</p> <p>如你所看到的，他在步驟 1 使用了一個方塊，在步驟 2 使用了三個方塊，以及在步驟 3 使用了六個方塊。 請問在步驟 4 時，他應該會使用多少個方塊？ 請把解題想法以文字(圖形)詳細記下來。</p> <p>步驟 3 共有 6 個方塊 第 3 個在加一塊方塊 下面有空心為了要穩 所以下面要加 3 塊</p> <p>步驟 4</p> <p>3</p>	<p>答案正確，計算過程錯誤或無計算過程，但包含正確的數學推理。</p>
<p>Level 2 (s23)</p>	<p>步驟 1 步驟 2 步驟 3</p> <p>如你所看到的，他在步驟 1 使用了一個方塊，在步驟 2 使用了三個方塊，以及在步驟 3 使用了六個方塊。 請問在步驟 4 時，他應該會使用多少個方塊？ 請把解題想法以文字(圖形)詳細記下來。</p> <p>4 個</p> <p>2</p> <p>$3-1=2$ $6-3=3$</p> <p>1 2 3 4</p>	<p>答案不正確，計算過程錯誤或無計算過程，部份文字說理正確</p>
<p>Level 1 (s27)</p>	<p>步驟 1 步驟 2 步驟 3</p> <p>如你所看到的，他在步驟 1 使用了一個方塊，在步驟 2 使用了三個方塊，以及在步驟 3 使用了六個方塊。 請問在步驟 4 時，他應該會使用多少個方塊？ 請把解題想法以文字(圖形)詳細記下來。</p> <p>步驟 2 時他使用了 3 個塊 步驟 3 時他使用了 6 個塊 每一步驟就差 3 倍 所以步驟 4 時他會使用 9 個方塊</p> <p>9</p>	<p>嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。</p>

表 7 網路通訊之示例萃取

<p>Level 5 (s18)</p>	 <p>格林威治 午夜 12 點 柏林 上午 1 點 雪梨 上午 10 點</p> <p>當雪梨時間是下午 7 點時，柏林是幾點？ 請把解題想法以文字詳細記下來。</p> <p>解時 = 19 時 19 - 9 = 10 解 10 - 1 = 9 A 上午 10 時</p> <p>由 10 - 1 就知道雪梨跟柏林的時相差 9 時</p>	<p>答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。</p>
<p>Level 5 (s1)</p>	 <p>格林威治 午夜 12 點 柏林 上午 1 點 雪梨 上午 10 點</p> <p>當雪梨時間是下午 7 點時，柏林是幾點？ 請把解題想法以文字詳細記下來。</p> <p>柏林差 10 - 1 = 9 時 10 - 1 = 9 所以 19 - 9 = 2 上午 12 - 2 = 10 A 上午 10 點</p>	<p>答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。</p>
<p>Level 5 (s24)</p>	 <p>格林威治 午夜 12 點 柏林 上午 1 點 雪梨 上午 10 點</p> <p>當雪梨時間是下午 7 點時，柏林是幾點？ 請把解題想法以文字詳細記下來。</p> <p>雪梨和柏林差了 9 時， 所以減個 9 就 OK 了。</p> <p>10 - 1 = 9 12 - 9 = 3 19 - 9 = 10 A = 10 時</p>	<p>答案正確，計算過程和文字說理正確，而且完整。</p>

<p>Level 2 (s15)</p>		<p>答案不正確，計算過程錯誤或無計算過程，部份文字說理正確</p>
<p>Level 1 (s5)</p>		<p>嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。</p>

六、分享與建議

- 1、學生的文字敘述說理能力不佳，影響評量的進行。
- 2、評分規準 5 個 Level 之分際難以掌握。
- 3、背景知識影響解題表現，雲林縣為農業縣學生對國際化時差問題較少接觸，網路通訊問題情境不易掌握以致錯誤率偏高達 65%。

數學 QUASAR 紙筆認知評量——以等腰三角形為例

嘉義市崇文國小 曾瑞媛、張英燦

壹、前言

對於數學的評量方式，筆者用過的類型有紙筆評量、闖關活動、資訊融入教學……等，就是沒有用過數學紙筆認知評量的方式。寒假期間，在高雄輔導團的促成下，筆者上了跨縣市「精進數學教學與命題工作坊」的課，重新溫習了有關評量的命題方式，讓筆者對於數學評量有不同的想法，而對於教授及老師所交代的作業躍躍欲試，想趁機了解學生對於「解題」的想法。

由於學生大多只有做解題的工作，並沒有被要求寫出解題的想法，因此我們很難了解學生是否真的理解了，透過紙筆認知評量，我們便可知道學生的真實想法，也可以了解學生「知道什麼以及會什麼」。

貳、評量目標

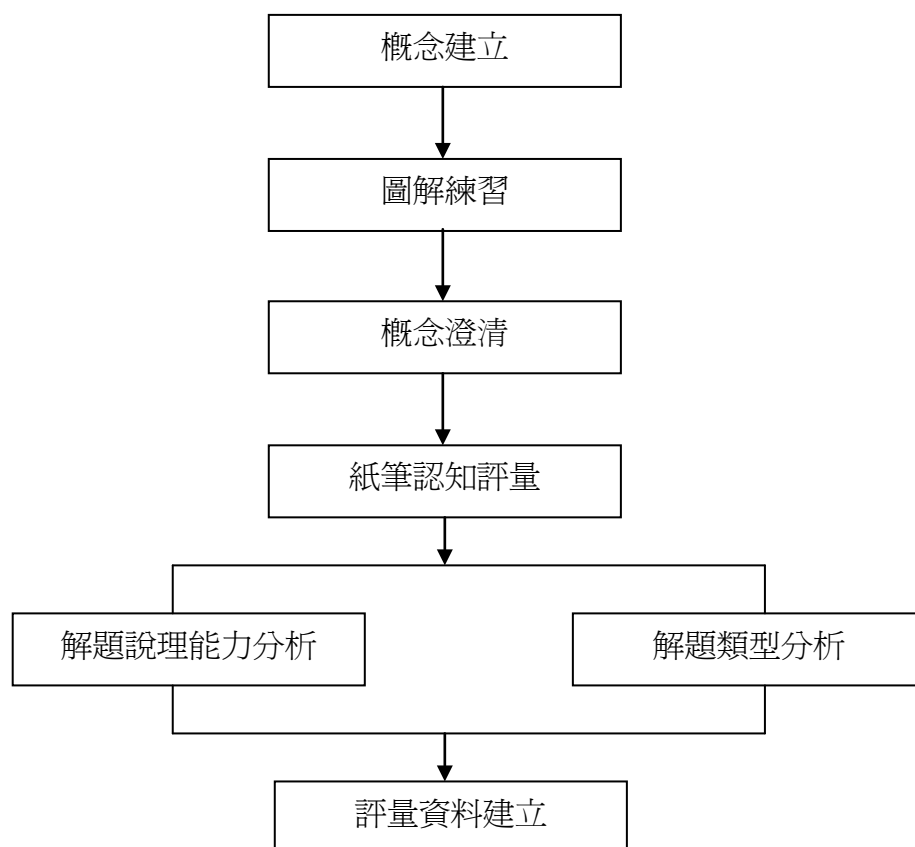
- 一、了解每個學生在「怎樣解題」題型中，其數學解題與說理的能力。
- 二、了解全班學生在「怎樣解題」題型中，正確解題與錯誤解題之解題類型。

參、實施年級或適用對象

本示例之實施年級為嘉義市崇文國小四年級 32 位學生。而本示例(三角形角度)的題材原本是國小四年級的課程，亦可適用於國小五年級學生。

肆、實施流程

由於四年級上學期已過，筆者原本想利用下學期開學初，重新檢視學生對於四上第三次定期評量的理解，礙於課程進度及其他種種原因，筆者選了二題角度的應用問題，以深入了解學生對等腰三角形角度的解題創意與迷思。



伍、評量內容

本評量的內容為等腰三角形的角度問題，共二題。題目如下：

題目一：一個等腰三角形的頂角是 50 度，請問這個等腰三角形的一個底角是幾度？

做法：

想法：

題目二：一個等腰三角形的一個底角是 35 度，請問這個等腰三角形的一個頂角是幾度？

做法：

想法：

陸、評量標準

本評量的規準分為 Level 1 到 5，說明如表 6-1。

表 6-1 評分規準

Level	評 分 規 準
Level 1	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
Level 2	1. 答案正確，計算過程正確，文字說理錯誤或無文字說理。 2. 答案正確，計算過程錯誤或無計算過程，文字說理略不清楚或說理錯誤或無文字說理。 3. 答案不正確，但數學推理正確。
Level 3	答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯為文字或說理略不清楚。
Level 4	答案正確，計算過程及文字說理正確，但不夠完整。
Level 5	答案正確，計算過程及文字說理正確，而且完整。

柒、學生之解題表現分析

筆者以四年級上學期的等腰三角形的角度問題作施測，以紙筆評量，請學生將問題做法及想法寫在紙上。根據崇文國小四年級學生解題表現分析，茲說明如表 7-1：

表 7-1 等腰三角形角度問題的評量表現

	解題		解題說理 Level1~5					合計
	正確	錯誤	5	4	3	2	1	
題目一	27	5	7	2	12	5	6	32
題目二	27	5	8	3	10	6	5	32
合計	54	10	15	5	22	11	11	64
百分比	84%	16%	23%	8%	35%	17%	17%	100%

由表 7-1 得知，等腰三角形角度問題之整體評量表現，是正確解題的高達 84%，錯誤解題的只有 16%。但解題說理表現達到 Level 5 和 4 的卻只有 31%，也就是說不會說理的學生高達 69%。可見會解題學生，其說理能力未必是很好的。茲將學生的解題表現分析各舉一例，如表 7-2 和表 7-3

表 7-2 角度問題題目一之解題示例

角度問題 題目一		一個等腰三角形的頂角是 50 度，請問這個等腰三角形的一個底角是幾度？		
解題示例			評分說明	
Level 1	做法	$180 - 58 = 122$		嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	$50 \times 2 = 100$		
Level 2	做法	$180 - 50 = 130$ $130 \div 2 = 65$		答案正確，但無文字說理。
	想法			

Level 3	做法	$180 - 50 = 130$ $130 \div 2 = 65$	答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯。
	想法	先 180 減 50 等於 130 130 再除以 2 等於 65	
Level 4	做法	$180 - 50 = 130$ $130 \div 2 = 65$	答案正確，計算過程及文字說理正確，但不夠完整。
	想法	一個等腰三角形是 180 度，所以先減掉頂角，再除以二就是答案了。	
Level 5	做法	$180 - 50 = 130$ $130 \div 2 = 65$	答案正確，計算過程及文字說理正確，而且完整。
	想法	一個等腰三角形有三個角，三個角加起來是 180 度，一個頂角是 50 度，所以先把 180 度減掉 50 度，答案是 130 度，但是一個等腰三角形有一個頂角和兩個底角，所以 130 度還要除以二，答案是 65 度，才是一個底角的度數。	

題目一的正確解題率雖然有 84%，但其說理能力在 Level 5 和 4 的卻只有 28%，可見學生的解題能力很好，但在說理能力方面是尚待加強的。

表 7-3 角度問題題目二之解題示例

角度問題 題目二		一個等腰三角形的一個底角是 35 度，請問這個等腰三角形的一個頂角是幾度？	
解題示例			評分說明
Level 1	做法	$35 \div 2 = 9 \cdots 17$	嘗試回答，但答案不正確，觀念錯誤。
	想法	$35 \times 3 = 105$	
Level 2	做法	$180 - 35 - 35 = 70$	答案正確，但文字說理略不清楚。
	想法	把兩個底角減掉，就是頂角。	
Level 3	做法	$35 \times 2 = 70$ $180 - 70 = 110$	答案正確，計算過程正確，但直接將算式翻譯。
	想法	先把底角乘以二，然後一百八十度減掉七十度就可以了。	
Level 4	做法	$35 \times 2 = 70$ $180 - 70 = 110$	答案正確，計算過程及文字說理正確，但不夠完整。
	想法	一個等腰三角形是 180 度，兩個底角加起來是 70 度，然後再相減。	
Level 5	做法	$35 \times 2 = 70$ $180 - 70 = 110$	答案正確，計算過程及文字說理正確，而且完整。
	想法	一個等腰三角形有一個頂角和兩個底角，一個底角是 35 度，所以 35 度要乘以二，答案是 70 度，三角形三個角加起來是 180	

		度，所以 180 度減掉 70 度，就是一個頂角的度數了。	
--	--	-------------------------------	--

題目二的正確解題率雖然有 84%，且其說理能力在 Level 5 和 4 的人數比題目一的多出二位，但其比率卻仍只有 34%，可見學生在說理能力方面仍是需要加強的。

捌、教學省思

因為研習，讓筆者有瞭解學生試圖說理的機會，筆著認為學生會解題，其說理能力應該不會有問題，但這次的施測中，筆者看到的結果卻不是如此，筆者發現會解題的學生，其說理能力未必是佳的。

筆者教學時，會請學生試圖說說問題該怎麼解，但並未曾讓學生寫出他們的想法，而此次的施測，筆者發現學生或因熟能生巧、或因背題型，而知道數學問題該怎麼解題，但對於其解題背後的真正意思卻是不甚了解的。因此身為一個教學者，在教學時，除了在教學生的解題能力外，更要了解學生對於數學題目是否理解？才能達到更高層的教学目標。很謝謝這次的研習讓我有那麼多的收穫。

四上數學領域期末定期考查卷之試題分析

明義國小 蔡慧玲

一、前言

為瞭解本班學生上學期第三次定期考查之學習成效，研究者於下學期開學初利用同一份試卷進行延後測，並將分析結果擬訂數學補救計畫，進行加強教學。

二、學習對象：

本次的後測對象為四年三班全體同學，共 21 名學生（當天有 3 人請假）。

三、課程內容：

本校四年級採用康軒版數學課本，評量範圍為四上數學領域第八～十一單元（分別為三角形、分數、小數和時間）。

四、施測時間：四十分鐘。

五、前測與延後測評量結果之初步比較

兩次的測驗時間相距約四週，前測學生數 24 人，而延後測為 21 人。以下為兩次評量結果的分數組距表：

（一）前測：

分數組距	100	99~90	89~80	79~70	69~60	59 以下
人數	5	8	7	2	1	1

（二）延後測：

分數組距	100	99~90	89~80	79~70	69~60	59 以下
人數	1	11	3	3	2	1

比照兩次測驗的分數組距結果，可看出延後測的 100 分和 89~80 分的人數明顯減少，經過計算全班兩次測驗的平均分數，前測分數為 88.91 分，而延後測成績為 87.04 分，退步近 2 分，為進一步瞭解學生的學習情形，將根據學生在延後測中答題的錯誤類型，分析錯誤數學概念，並針對學生需求進行補救教學。

六、延後測結果之試題分析

因全班前測試卷已於上學期期末發下未收回，現僅就延後測部分進行錯誤類型分析。以下針對各大題（包括選擇題、填充題、計算題和應用題）中錯誤率前三名進行內容分析：

（一）選擇題

在選擇題中，延後測部分錯誤率最高為第 2、5 和 6 題，與前測結果中錯誤率最高也相同，依序分析如下：

第 2 題 8 公尺 2 公分是幾公尺？ (1)82 公尺 (2)8.2 公尺 (3)8.02 公尺 (4)8.002 公尺				
答題反應(*) 為正確答案	1	2	3*	4
答對比率(%)	0	19.05	61.90	14.29

第 2 題主要在檢測用小數來進行公分和公尺的化聚，全班整體通過率有 61.90%。從選錯的選項分析，選項(2)8.2 公尺最多，而選項(4)14.29%次之。由於四年級學生已學過長度和重量的複名數換算，例如：1 公分=10 毫米，1 公斤=1000 公克等，故推測答錯的學生可能是與先前的舊經驗混淆所致。

第 5 題 傑輪游泳游了 1 時 30 分，這「1 時 30 分」是指什麼？ (1)下午 1 時 30 分 (2)13 時 30 分 (3)時刻 (4)時間				
答題反應(*) 為正確答案	1	2	3	4*
答對比率(%)	4.76	0	28.57	66.67

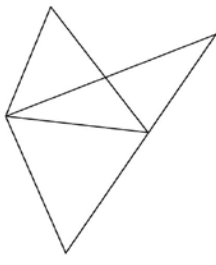
第 5 題主要在檢測學生是否瞭解「時刻」與「時間量」的意義，本題的「1 時 30 分」指的是「時間量」，全班整體通過率有 66.67%，從選錯的選項分析，選項(3)時刻是最多的，有 28.57%，顯示有超四分之一的學生會將「時間量」與「時刻」搞錯。

第 6 題 等腰三角形中，頂角為 70 度，則底角是多少？ (1) 70 度 (2) 60 度 (3)55 度 (4)50 度				
答題反應(*) 為正確答案	1	2	3*	4
答對比率(%)	9.52	9.52	76.2	4.76

第 6 題主要在檢測學生對等腰三角形的性質是否瞭解。本題的全班整體通過率有 76.2%，其它三個錯誤選項均有人選，主要是選項(1)(2)各佔 9.52%，可推測選錯的人對於等腰三角形兩腰等長、兩底角相等的性質並不清楚，甚至將頂角當成底角。

（二）填充題

在填充題中，後測部分錯誤率最高為第 5、6 和 8 題，依序分析如下：

第 5 題 圖中有幾個三角形？ 正確答案：(7) 個		
		
	正確	錯誤
比率(%)	76.19	23.81

第 5 題主要在檢測學生是否能正確點數三角形的個數。本題的全班整體通過率有 76.19%，學生的錯誤類型有兩種：(6) 和 (8) 個，其中寫答案寫 (6) 個的人數有 19.05%。

第 6 題 把帶分數換成假分數。		
(1) $3\frac{5}{9} = (\quad)$ 。		
(2) $4\frac{4}{5} = (\quad)$		
	正確	錯誤
比率(%)	80.95	19.05

第 6 題主要在檢測學生具備將帶分數換成假分數的計算能力。整體通過率有 80.95%，而錯誤比例有 19.05%，近全班的五分之一。在前測結果中，全班可能是在剛學完該單元，對於帶分數換成假分數的算則較熟悉，因此答對率為 100%，但在延後測中，這個大題則有 4 位學生寫錯，從學生寫錯的答案（見下圖），可推測學生對於帶分數換成假分數（將整數乘以分母後，再加上分子，則成為假分數的新分子，而分母則不變）仍未熟練或甚至已遺忘。以下為學生實際解題的錯誤類型：

$(1) 3\frac{5}{9} = (\cancel{3}\frac{6}{9})$ 。	$(1) 3\frac{5}{9} = (\frac{32}{9})$ 。
$(2) 4\frac{4}{5} = (\cancel{4}\frac{4}{5})$ 。	$(2) 4\frac{4}{5} = (\frac{44}{5})$ 。

第 8 題 鐵達尼號去程航行時間是 2 日 10 時，回程比去程多了 15 時，回程航行花了 () 日 () 時。

正確答案：(3) 日 (1) 時		
	正確	錯誤
比率(%)	80.95	19.05

第 8 題主要在檢測學生能否解決生活情境中，日和時的時間量加減問題。本題整體通過率有 80.95%，從學生錯誤答案中發現，除了 1 人使用錯誤的解題策略，用減法解題外，其餘寫錯的學生均能正確使用時間的減法策略：2 日 10 時 + 15 時，唯計算過程出錯，例如未進位，直接寫成 2 日 25 時；或將 10 時省略，直接寫成 2 日 15 時。

(三) 計算題

此大題為分數的減法與乘法計算，一共有二小題，以下分別討論分析：

第 1 題 $2\frac{3}{10} - 1\frac{7}{10}$		
	正確	錯誤
比率(%)	85.71	14.29

第 1 題主要在檢測學生能否解決同分母帶分數-帶分數的計算題，本題的全班整體通過率有 80.95%，而錯誤題型為兩類，有 2 人沒寫，另 1 人則將減法看成加法來解題，需進一步瞭解這 2 位未答題學生可能遭遇的問題。

第 2 題 $\frac{13}{9} \times 3$		
	正確	錯誤
比率(%)	85.71	14.29

第 2 題主要在檢測學生能否解決假分數×整數的分數計算題，本題整體通過率有 85.71%，3 人計算錯誤，一位未完成，而兩種錯誤解題分別是對算則完全不會，或是將假分數化成帶分數時計算錯外。以下為學生實際解題的錯誤類型：

2. $\frac{13}{9} \times 3$
 $= \frac{39}{9}$
 $= 4$

2. $\frac{13}{9} \times 3$
 $= \frac{13}{9}$
 $= 1\frac{4}{9}$

(四) 應用題

第1題 編一個中國結需要 $\frac{12}{5}$ 公尺的繩子， <u>家家</u> 編了7個中國結，需要多長的繩子？		
	正確	錯誤
比率(%)	66.67	33.33

第1題主要在檢測學生能否解決在生活情境中假分數的整數倍問題。本題整體通過率為66.67%，學生除了能正確列出算式外，需具備計算假分數乘以整數的能力，並將最後的假分數換算成帶分數。從錯誤的類型分析，有2人未填答，2人忘記寫答案，3人則是算式寫正確，但在假分數換算成帶分數時除錯，由此可推論學生在分數計算上算則部分是沒問題，唯一需加強整數除法的計算。以下為學生實際解題的錯誤類型：

第3題 <u>哈利</u> 買了一桶10公升的果汁， <u>妙麗</u> 上午喝了1.234公升，下午 <u>榮恩</u> 喝了1356毫升，請問誰喝得多？		
	正確	錯誤
比率(%)	71.43	28.57

第3題主要在檢測學生能否用小數進行公升和毫升的化聚。本題整體通過率為71.43%，顯示學生知道1毫升=0.001公升，而1356毫升=1.356公升，進一步比較1.234和1.356的大小。本題的錯誤題型分三類，有1人沒寫，2人在單位換算中少寫單位，有3人在單位換算有錯誤呈現，寫出1.234=1234，而非1.234公升=1234毫升，而最後答案仍正確，應是對容量的大小與運用不同單位（公升或毫升）的呈現仍未完全理解，有待進一步釐清與概念的強化。以下為學生實際解題的錯誤類型：

第4題 <u>小雅</u> 和 <u>依林</u> 去看電影，看了一場片長2小時45分的電影，電影結束是下午2時10分，請問他們從幾時幾分開始看電影？		
---	--	--

	正確	錯誤
比率(%)	66.67	33.33

第4題主要在檢測學生能否解決生活情境中，時刻與時間量的計算(減法)。本題的全班整體通過率為66.67%，有三分之二的學生能先將下午2時10分換成二十四時制表示14時10分，再以14時10分-2時45分，求出正確答案上午11時25分。錯誤類型的分析可分為三類，有4人在換算成二十四時制時少寫”下午”，有1人沒寫，有2人直接將2小時45分-2時10分=35分，可能是學生看到數字大的直接減數字小的，但並未判斷「2小時45分」是「時間量」，而「下午2時10分」是「時刻」，缺乏二十四時制的觀念。以下為學生實際解題的錯誤類型：

4. 小雅和依林去看電影，看了一場片長2小時45分的電影，電影結束是下午2時10分，請問他們從幾時幾分開始看電影？

$$\begin{array}{r}
 2\text{時}45\text{分} \\
 - 2\text{時}10\text{分} \\
 \hline
 35\text{分}
 \end{array}$$

答：35分

七、結語

總結上述的分析，研究者發現學生上學期期末考有以下幾個數學概念仍需加強：1. 整數除法的計算，2. 時刻與時間量在生活情境中的應用，3. 長度、容量和重量單位間用小數來進行化聚。

由於在四年級下學期第一單元「乘法和除法」與第二單元「整數四則混合計算」仍持續上整數的加減乘除計算，加強計算的熟練。至於利用小數進行單位化聚，可於第四單元「小數的計算」加以補強。而時刻與時間量在生活中的應用部分，因本學期預度課程進度並無安排時間教學，研究者擬設計學習單，並安排一節彈性節數進行教學，除澄清學生十二時制與二十四時制的互換概念，同時加強學生秒、分、時、日的計算能力。

二年級數學期末考延後測試題與評量分析

鳳鳴國小 洪鈺櫻

期末考題目：以期末考題目進行延後測，比較全班學生成績變化情形，
個別的學生成績變化狀況，討論單題答對率與答題狀況分析。

壹、前言

現在提供教科書的廠商做得非常完備，所有的周邊商品-舉凡電子書、補充教材、練習的作業本都一應俱全。尤其是命題光碟中也涵括了非常多的題型。提供了非常便捷的一條捷徑，省去教師布題的時間，不過，隱藏在背後的問題也不容忽視。雖然美其名是提供給使用該版本教科書的教師來使用，但是若是想要取得命題光碟其實是非常容易的。

尤其是，坊間的補習班為了業績壓力，也會想盡辦法取得教科書廠商提供給學校教師的命題光碟。所以，早在老師考試之前，學生早就已經將裡面的題目重複做過好幾遍了。這樣一來，不知道到時候考出來的是學生的基本實力，還是本能反應。

所以，希望能藉由延後測，來瞭解學生實際學到的能力，也能作為下一次命題方向的參考依據。

貳、實施年級及對象

本次評量的實施對象為高雄市鳳鳴國小二年級 23 位學生。

參、評量目標

- 一、瞭解每個學生在經過一段時間(寒假假期)後，關於學習乘法(1 和 0、2、4、5、10 的乘法)及平面、直線和角(邊和角、認識平行和垂直、圖形的大小比較)的數學理解及解題應用的能力。
- 二、了解全班學生在學習乘法及平面、直線和角的數學理解及解題應用的能力。

肆、單元學習目標

- 一、理解乘法的意義，能做橫式紀錄、連加的計算，解決生活中的問題。
- 二、對平面圖形構成要素進行觀察、測量、比較。
- 三、能理解被乘數為 1、0 和 4，乘數為 0 的乘法，並在具體情境中，認識乘法交換律。

伍、能力指標

第七單元---乘法

- 2-n-05 能作連加、連減與加減混合計算。
- 2-n-06 能理解乘法的意義，使用 \times 、 $=$ 作橫式紀錄，並解決生活中的問題。
- 2-n-07 能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。
- 2-n-08 能理解九九乘法。

第八單元---平面、直線和角

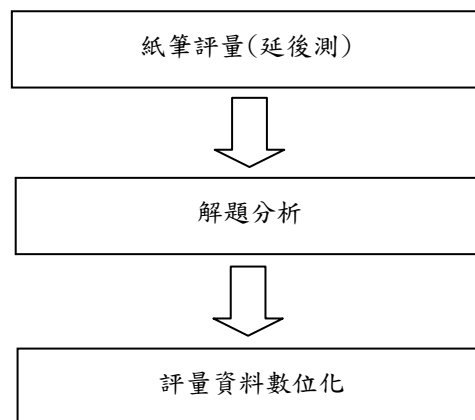
- 2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面（含簡單立體形體）。
- 2-s-02 能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象。
- 2-s-04 能畫出兩點間的線段，並測量其長度。
- 2-s-05 能認識面積，並作直接比較。（同 2-n-17）
- 2-s-06 能由邊長關係，認識簡單平面圖形與立體形體。
- 2-n-17 能認識面積，並作直接比較。（同 2-s-05）

第九單元---乘法

- 2-a-03 能在具體情境中，認識乘法交換律。
- 2-n-05 能作連加、連減與加減混合計算。
- 2-n-06 能理解乘法的意義，使用 \times 、 $=$ 作橫式紀錄，並解決生活中的問題。
- 2-n-07 能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。
- 2-n-08 能理解九九乘法。

陸、實施流程

這次的評量試題採用 99 學年度上學期的第三次月考的數學試卷。利用開學的第一天，在未事先告知學生的狀況下測驗，之後再加以分析。



柒、評量內容

評量的內容及題型如下，但是這一次的考題是由隔壁班的老師所出題。

高雄市鳳鳴國民小學 99上第三次成績考查數學科 試卷 二年 班 座號： 姓名：
 (延後測)

一、看圖填填看(共37分/每格1分)

1.



$10 \times () = ()$

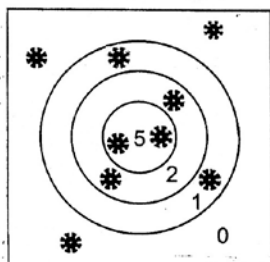
10 的 () 倍是 ()。

2. 10 顆彈珠裝一袋，下面圖的彈珠可以裝滿幾袋？



答：有 () 顆彈珠，可以裝滿 () 袋。

3. 小明投花片的结果如下：



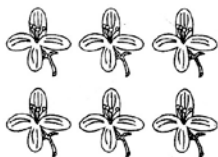
得 5 分的有： $5 \times () = ()$

得 2 分的有： $2 \times () = ()$

得 1 分的有： $1 \times () = ()$

得 0 分的有： $0 \times () = ()$

4. 一朵花有 4 片花瓣，6 朵花共有幾片花瓣？



算式： $() \times () = ()$

答：

5. 一箱飲料有 5 瓶，9 箱共有幾瓶飲料？

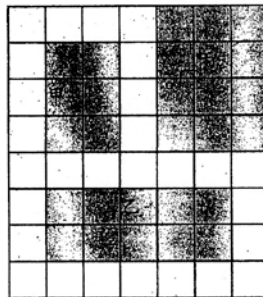
寫出乘法算式算算看。



算式： $() \times () = ()$

答： () 瓶。

6.



(1) 甲圖形有幾格？

$2 \times () = ()$

$3 \times () = ()$

答： () 格。

(2) 乙圖形有幾格？

$2 \times () = ()$

$5 \times () = ()$

答： () 格。

(3) 丙圖形有幾格？

$4 \times () = ()$

$3 \times () = ()$

答： () 格。

二、連連看(共8分/每格2分)

1.

- ① $8+8+8+8$ • 7 的 3 倍
- ② $9+9+9$ • 8 的 4 倍
- ③ $3+3+3+3$ • 4 的 3 倍
- ④ $4+4+4$ • 3 的 4 倍

三、填填看(共22分/每格2分)

1. 10 的 9 倍比 10 的 6 倍多 () 個 10。

2. 2 隻襪子湊成一雙，下面圖的襪子可以湊成幾雙？

(1) 18 隻襪子可以湊成 () 雙。

(2) 14 隻襪子可以湊成 () 雙。

3. 一輛小巴士可以坐 5 個人，7 輛

小巴士可以坐幾個人？寫出乘法算式計算。

算式：() × () = ()

答：() 個人

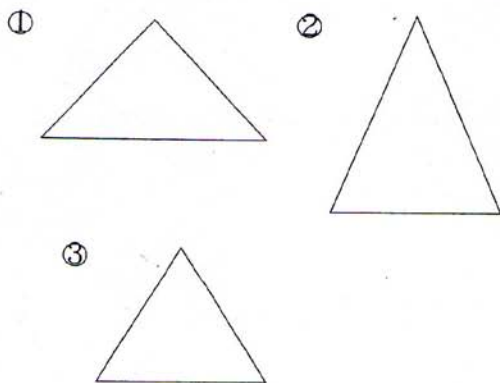
4. 一袋牛角麵包有 4 個，7 袋共有幾個牛角麵包？寫出乘法算式計算。

算式：() × () = ()

答：() 個

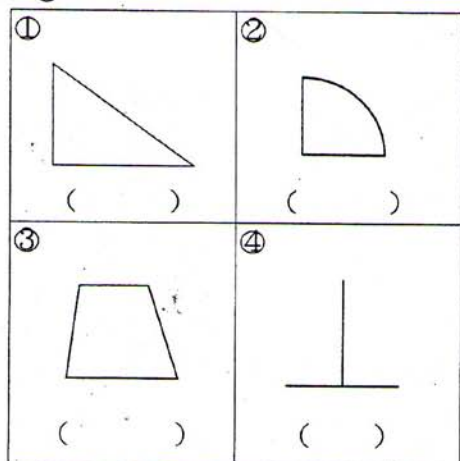
四、圖圖看(共6分/每格2分)

1. 量一量邊長，再圈出正三角形。



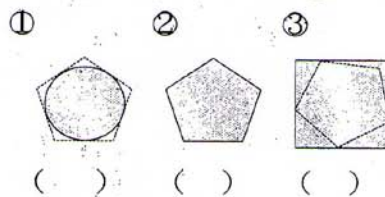
五、看圖做做看(共4分/每格1分)

1. 有垂直現象的打√，有平行現象的畫○。



六、比比看(共3分/每格1分)

1. 比比看，最大的面在()中打√，最小的面在()中畫○。



七、做做看(共20分/每格4分)

1. 小明買每枝 5 元的鉛筆 6 枝；小華買每枝 6 元的原子筆 5 枝，誰付的錢比較多？寫出乘法算式，並圈圖看。

(小明 ， 小華 ， 一樣多)

2. 一隻青蛙有 4 條腿，9 隻青蛙有幾條腿？寫出乘法算式計算。

答：() 條腿

3. 列乘法算式做做看。

一籠包子有 2 粒，小紅吃了 9 籠，他共吃了幾粒包子？

4. 列乘法算式做做看。

一個盤子有 4 塊蛋糕，6 個盤子有幾塊蛋糕？

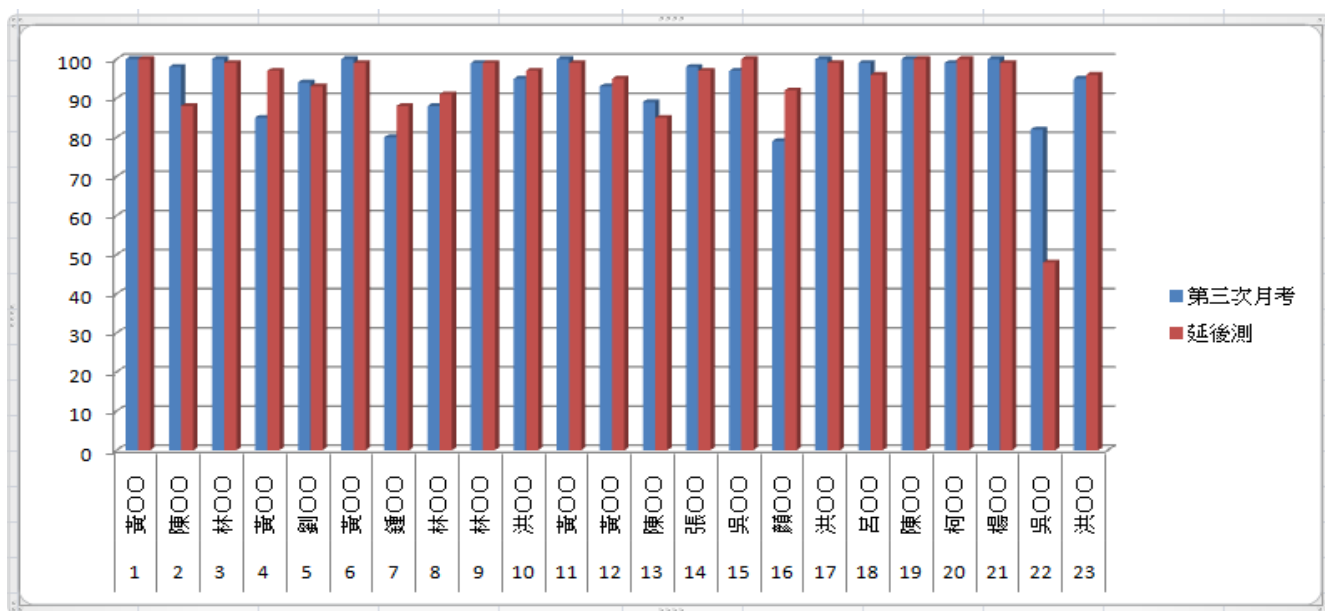
5. 列乘法算式做做看。

一個魚缸有 5 條魚，8 個魚缸有多少條魚？

捌、學生之表現分析

一、兩次評量成績比較，如下表：

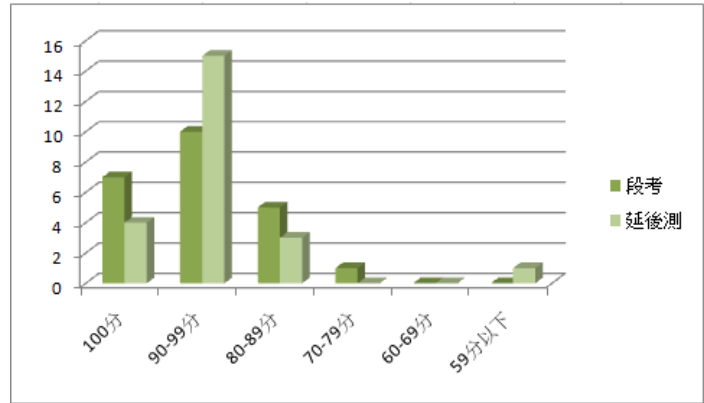
座號	姓名	段考	延後測	座號	姓名	段考	延後測
01	黃○○	100	100	13	陳○○	89	85
02	陳○○	98	88	14	張○○	98	97
03	林○○	100	99	15	吳○○	97	100
04	黃○○	85	97	16	顏○○	79	92
05	劉○○	94	93	17	洪○○	100	99
06	黃○○	100	99	18	呂○○	99	96
07	鍾○○	80	88	19	陳○○	100	100
08	林○○	88	91	20	柯○○	99	100
09	林○○	99	99	21	楊○○	100	99
10	洪○○	95	97	22	吳○○	82	48
11	黃○○	100	99	23	洪○○	95	96
12	黃○○	93	95				



按照兩次考試的成績來看，原則上這兩次的分數差距都不算太大(差距都在1~4分之間)，有可能是因為二年級的數學較為簡單，比較缺少較高層次的運算解題，所以孩子在兩次考試的成績表現並沒有很大的差距。唯一有兩位學生(2號陳00和22號吳00)的延後測較第一次的考試成績低於10分以上，則可能因為是這兩位學生是資源班的學生，在第一次考試時有其他教師的輔助(念題或是其他的協助)所以取得較高的分數，第二次則全靠自己的理解及判斷來完成作答。

二、兩次測驗成績組距比較表

從兩次考試的成績組距來看，延後測 90 分~99 分的人數較為增加，而原本 100 分的人數則減為 4 人，應該是答題時，不夠仔細的緣故。



	100分	90-99分	80-89分	70-79分	60-69分	59分以下
段考	7	10	5	1	0	0
延後測	4	15	3	0	0	1

三、學生解題錯誤類型分析

因為第一次的考的試卷已經發下，無法收回。所以僅能針對延後測錯誤的題型來進行分析。另外，22 號吳 00 的錯誤題目較多，較無法確定其程度(有可能是看不懂題目就隨意亂答)，所以將她排除在外不列入分析。

(一)

2.10 顆彈珠裝一袋，下面圖的彈珠可以一

裝滿幾袋？



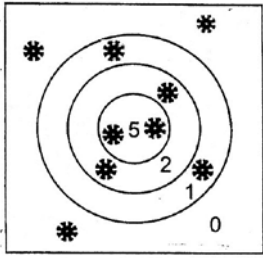
答：有 () 顆彈珠，可以一裝滿 () 袋。

解題類型分析				
解題 1-1 ~ 有()顆彈珠			人數	百分比
答案正確	類型一	22(顆)	12	55%
	類型二	2(顆)	1	
答案錯誤	類型三	12(顆)	1	45%
	類型四	21(顆)	1	

解題類型分析				
解題 1-2 ~ 可以裝滿()袋			人數	百分比
答案正確	類型一	22(袋)	19	55%
	類型二	2(袋)	1	
答案錯誤	類型三	12(袋)	1	45%
	類型四	21(袋)	1	

(二)

3. 小明投花月箭的結果如下：



得 5 分的有：5x () = ()

得 2 分的有：2x () = ()

得 1 分的有：1x () = ()

得 0 分的有：0x () = ()

解題類型分析				
解題 2-1 ~ 5x(2)=()			人數	百分比
答案正確	類型一	10	21	95%
答案錯誤	類型一	16	1	5%

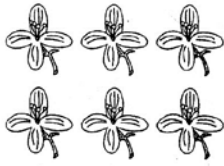
解題類型分析				
解題 2-2 ~ 2x(2)=()			人數	百分比
答案正確	類型一	4	21	95%
答案錯誤	類型一	空白 (沒作答)	1	5%

解題類型分析				
解題 2-3 ~ 1x(2)=()			人數	百分比
答案正確	類型一	2	21	95%
答案錯誤	類型一	1	1	5%

解題類型分析				
解題 2-4 ~ 0x(3)=()			人數	百分比
答案正確	類型一	0	21	95%
答案錯誤	類型一	3	1	5%

(三)

4. 一朵花有 4 片花瓣，6 朵花共有幾片花瓣？



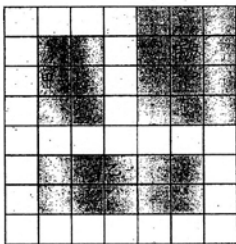
算式：() × () = ()

答：()

解題類型分析				
解題 3-1~答：			人數	百分比
答案正確	類型一	24 片	14	63%
答案錯誤	類型一	空白 (沒作答)	3	13%
	類型二	未註明 單位	4	18%
	類型三	2 片	1	5%

(四)

6.



(1) 甲圖形有幾格？

2 × () = ()

3 × () = ()

答：() 格

(2) 乙圖形有幾格？

2 × () = ()

5 × () = ()

答：() 格

(3) 丙圖形有幾格？

4 × () = ()

3 × () = ()

答：() 格

解題類型分析				
解題 4-1~答：() 格			人數	百分比
答案正確	類型一	6(格)	21	95%
答案錯誤	4-1	空白 (沒作答)	1	5%

解題類型分析				
解題 4-2~答：() 格			人數	百分比
答案正確	類型一	10(格)	21	95%
答案錯誤	類型一	空白 (沒作答)	1	5%

解題類型分析				
解題 4-3~答：() 格			人數	百分比
答案正確	類型一	12(格)	20	91%
答案錯誤	類型一	空白 (沒作答)	2	9%

(五)

1. 10的9倍比10的6倍多()個10。

解題類型分析				
解題 5-1~多()個10			人數	百分比
答案正確	類型一	24片	18	81%
答案錯誤	類型一	空白 (沒作答)	1	5%
	類型二	4	2	9%
	類型三	2	1	5%

(六)

2. 2隻襪子湊成一雙，下面圖的襪子可以湊成幾雙？

- (1) 18隻襪子可以湊成()雙。
 (2) 14隻襪子可以湊成()雙。

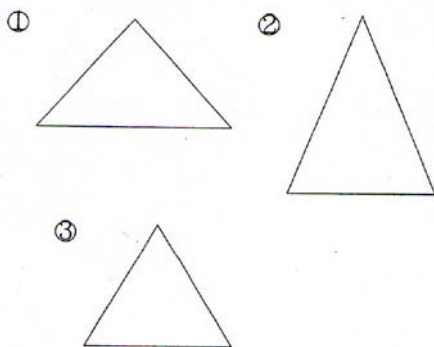
解題類型分析				
解題 6-1~18隻襪子可以湊成()雙			人數	百分比
答案正確	類型一	9(雙)	21	80%
答案錯誤	類型一	7	1	5%
	類型二	17	1	5%
	類型三	5	1	5%
	類型四	16	1	5%

解題類型分析				
解題 6-2~14隻襪子可以湊成()雙			人數	百分比
答案正確	類型一	7(雙)	21	85%
答案錯誤	類型一	6	1	5%
	類型二	13	1	5%
	類型三	17	1	5%

(七)

四、圖圖看(共6分/每格2分)

1. 量一量邊長，再圈出正三角形。

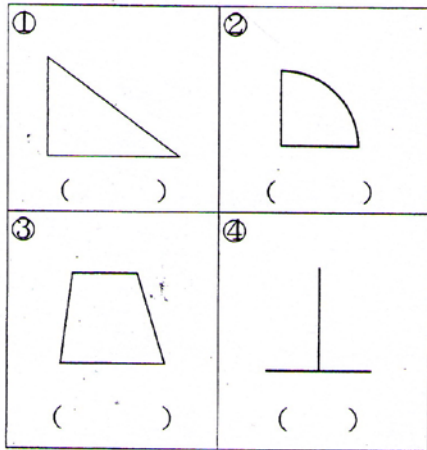


解題類型分析				
解題 7-1~圈出正三角形			人數	百分比
答案正確	類型一	圈出③	19	86%
答案錯誤	類型一	圈出①	2	9%
	類型二	圈出②	1	5%

(八)

五、看圖做做看(共4分/每格1分)

1. 有垂直現象的畫打✓，有平行現象的畫○。

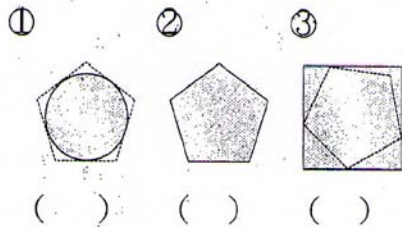


解題類型分析				
解題 8-1~垂直、平行			人數	百分比
答案 正確	類型一	①「✓」	12	55%
		②「✓」		
		③「○」		
		④「✓」		
答案 錯誤	類型一	①畫○	4	18%
	類型二	②打✓	2	9%
	類型三	③畫○	2	9%
	類型四	④畫○	2	9%

(九)

1. 比比看看，最大的面積在()中打✓，

最小的面積在()中畫○。



解題類型分析				
解題 9-1~比比看			人數	百分比
答案 正確	類型一	①「○」	14	64%
		②「✓」		
		③「✓」		
答案 錯誤	類型一	①空白	1	5%
	類型二	②「○」	1	5%
	類型三	③「✓」	3	13%
	類型四	④空白	3	13%

(十)

七、做做看(共20分/每格4分)

1. 小明買每枝5元的鉛筆6枝；小華買每枝6元的原子筆5枝，誰付的錢比較多？寫出乘法算式，並圈看。

(小明 ， 小華 ， 一樣多)

解題類型分析				
解題 10-1~誰付的錢比較多?			人數	百分比
答案 正確	類型一	列出算式，並圈選一樣多	18	81%
		圈選一樣多，但沒有算式	2	9%
答案 錯誤	類型二	6+5=11 11+6=17	1	5%
	類型三	圈選小華，且沒有算式	1	5%

(十一)

2. 一隻青蛙有4條腿，9隻青蛙有幾

條腿？寫出乘法算式算算看。

答：() 條腿。

解題類型分析				
解題 11-1~9 隻青蛙有幾條腿？			人數	百分比
答案 正確	類型一	$4 \times 9 = 36$ 答：(36)條 腿	21	95%
答案 錯誤	類型一	沒有算式， 但 答：(18)條 腿	1	5%

玖、分享與建議

經過這次的分析之後，發現孩子在對於乘法的部分似乎比較沒有太大的問題。可能是平常就有在背誦九九乘法(安親班老師也會要求)，所以只要看得懂題目，就能正確地完成作答。但是，在另一個單元---平面、直線和角的學習中，從延後測的作答結果分析，錯誤的人數還蠻多的，尤其是判別「垂直」和「平行」的第五大題(錯誤題型分析八)，判別錯誤的人數竟高達10人，占了45%強，將近一半的人在這個區塊是有概念混淆的情況發生。

而第六大題(錯誤題型分析九)比比看，在三個圖形中，比較彼此之間的面積大小，錯誤的人數也有8人之多，占36%強。不知道是不是題意說明不夠明白，還是圖形清晰度不佳，才導致孩子判別錯誤，這些都是在下一次出題所應該小心注意的。

參考文獻

命題出處--版本：部編本(翰林)二年級下學期(第三冊)

作業格式參考：

洪雪芬 數學 QUASAR 紙筆認知評量示例 「精進數學教學與命題工作坊」研習講義

一年級上學期期中數學評量試卷及延後測之學生學習成就分析

臺東大學附小 劉淑芳 王孔雀

壹、前言

臺灣的學前教育日漸普及，多數學生入學前，在日常生活中會接觸把玩各種形狀的物體，也有使用位置關係用語的經驗，對於0~10的數多少有探索、分辨、認識、比較和讀寫的經驗，同時也累積了有關「比多少」的感官經驗。低年級老師如何在教學中進一步運用學生的基礎數學常識，引導學生加深去思考自己「想數學」的歷程並發表，讓學生獲得成就感，進而享受學習的快樂。如何評量可客觀且真實的展現學童學習成效，實在是教學者應該費心琢磨的一環。

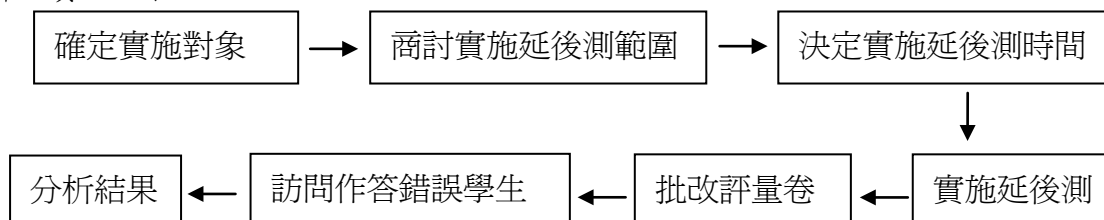
貳、延後評量目的

1. 探討可以客觀、正確評量出學生的數學學習表現的命題方式及題目呈現可注意之細節。
2. 分析學生作答錯誤型態與命題方式之關係，修改命題方式及注意事項。
3. 探究學生在學習「語文敘述進而具體操作，理解數學語言符號的表達方式」歷程的困難，精進教學改進教材、教法，或實施補救教學及個別輔導。

參、實施年級或適用對象

本校一年二班學生 27 名。

肆、實施流程



考量班上有位特殊學童，家長十分在意孩子學習表現，為避免家長緊張，因此延後測試卷在批改完及分析後，即以碎紙機銷毀。

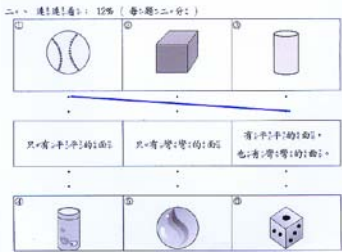
進行學生訪談時，以空白試卷讓答錯學生再一次作答，並詢問作答理由來判斷學生是否真正瞭解。訪談後受訪學生皆得到一份小禮物(文具、食品皆可)，受訪學生有被重視的感覺，未能被訪問的學生反而有些羨慕。

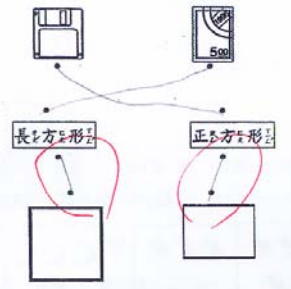

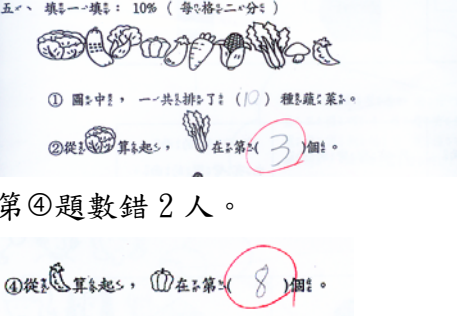
伍、評量內容

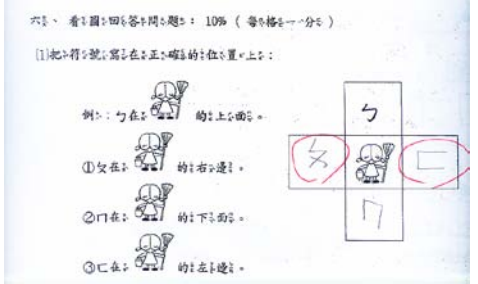
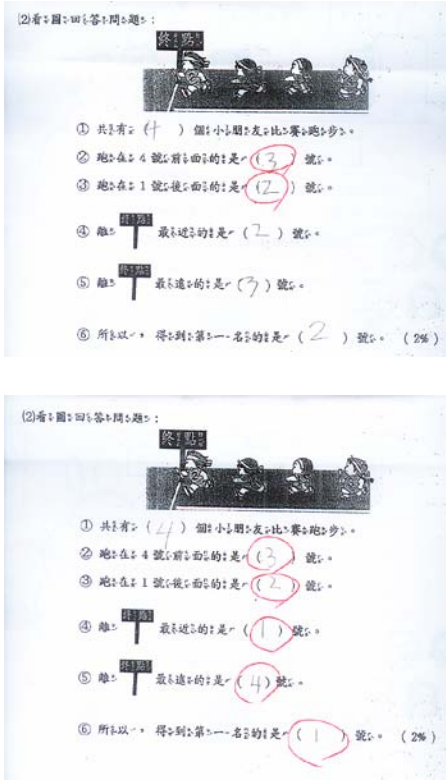
- (一) 本校九十九學年度第一學期數學領域期中評量試卷(附件一)
- (二) 學習領域範圍：南一版數學學習領域一上第一單元至第五單元。
- (三) 教材內容及教學重點

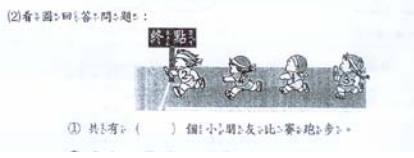
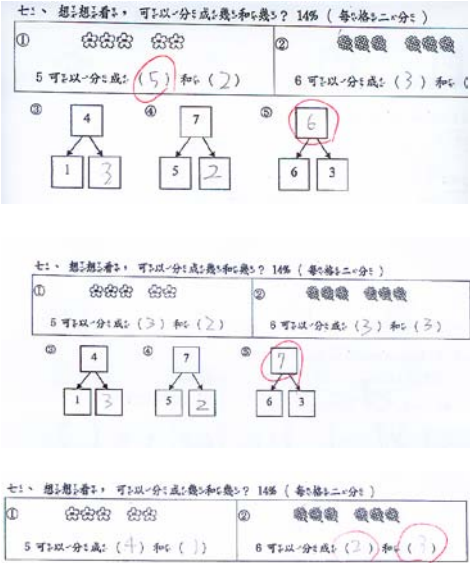
教材內容	教學重點
第一單元 數到 10	1. 認識 0~10 的數，進行說、讀、聽、寫、做。 2. 10 以內數量的比較。
第二單元 認識形狀	1. 認識平面和曲面。 2. 立體堆疊。 3. 辨識物體的外形並分類。 4. 認識長方形、正方形、圓形、正方體、長方體、圓柱體和球體，並使用標準名稱描述。
第三單元 分與合	1. 10 以內各數的分解和合成。
第四單元 第幾個	1. 10 以內的序數。 2. 認識基數和序數的關係。 3. 10 以內兩數量的比較。
第五單元 在哪裡	1. 認識上下、前後位置語詞。 2. 認識左、右位置語詞。 3. 認識遠、近位置語詞。

陸、學生解題表現分析

評量時間 試題及錯誤 類型分析 評量 目標	99 學年度第一學期期中評量	100 年 2 月 21 日延後測
10 以內數量的點數、比較多少。	一、數一數，有多少？在 () 裡寫出正確的數字。 比一比，比較多的在 <input type="checkbox"/> 中打 <input checked="" type="checkbox"/> ：24% (每格二分)	第③題 1 人未依題意，在指定的 <input type="checkbox"/> 中打 <input checked="" type="checkbox"/> 。
	1. 未依題意，在指定的空格中正確作答，1 人。 2. 兩個 () 沒寫，1 人。	
兩次的評量，學生在 10 以內數量的點數、比較多少的數學概念上沒有問題，只有少數學生因為粗心而沒有作答。		
辨識平面和曲面。	二、連連看：12% (每題二分)	全對。
	連錯 1 人。 	
題目將實物以平面圖案呈現，全班學生在辨識實物的平面和曲面，能理解命題的用意而正確的作答。		

<p>分辨物品形狀，對應幾何圖形，並連出幾何圖形之名稱。</p>	<p>三、連連看：8%（每題一分）</p>	
	<p>全對</p>	<p>正方形長方形連錯 1 人。</p> 
<p>3 月 4 日拿空白的試題請寫錯的學生再一次做答，該生毫不遲疑的寫出正確答案，因此學生在幾何圖形的辨認上沒有問題。</p>		
<p>分辨 10 以內的基數和序數的意義。</p>	<p>四、按照題意圈圈看：8%（每格二分）</p>	
	<p>① 3 個圈成第 3 個；第 3 個圈成 3 個 1 人。 ② 弄錯數起點，第 6 個從前面數起，未看到提示是從後面數起。16 人。 ③ 第 6 個圈成第 6 個；6 個圈成 6 個 1 人。</p>	<p>① 第 6 個，沒看到提示，弄錯數起點，14 人。 ② 6 個，沒有做答，1 人。</p> 
<p>上學期期中評量仍有學生不瞭解序數的意義。延後測結果，發現學生已能瞭解序數的意義，但仍有不少學生沒有注意數起點，而圈錯位置，但概念是對的。</p>		
<p>運用序數與基數之概念，確認實物在序列中的位置。</p>	<p>五、填一填：10%（每格二分）</p>	
	<p>第①題寫成 5 種，1 人。 第②題寫成第 3 個，3 人：未辨識清楚第三個與第八個圖案之差異。 第④題寫成第 4、3、10 個，各 1 人。 第⑤題寫成 5 種，1 人。</p>	<p>第②題未看清楚圖案數錯 2 人。</p>  <p>第④題數錯 2 人。</p>

	<p>第一次錯誤類型較多樣，其中第①題有學生因對蔬菜的概念不清楚，而答錯種類數量，延後測時這樣的情形未發生。第②題兩次評量都有學生因圖形相似而答錯。第④題兩次評量都有學生答錯，但錯誤的答案不同。訪問答錯學生時，學生皆能正確作答。</p>	
<p>辨識參考物的上下左右位置。</p>	<p>六、看圖回答問題：10%（每格一分） (1)把符號寫在正確的位置上：</p>	<p>第①、②題左右相反，錯誤3人。</p>  <p>錯誤人數增加2人，經訪談確認一名學童左、右概念尚未穩固。</p>
<p>辨識物體的相對位置：前、後、遠、近。</p>	<p>(2)看圖回答問題：</p> <p>第②題答案為3的。未看懂圖意，自行將圖中小朋友依先後順序編號。</p> <p>第③題答案為2的2人。未看懂圖意，自行將圖中小朋友依先後順序編號。</p> <p>寫成4號，5人，弄錯1號與第一名之意思。</p> <p>第④題答案為1的1人。未看懂圖意，自行將圖中小朋友依先後順序編號。</p> <p>第⑤題答案為4的1人。未看懂圖意，自行將圖中小朋友依先後順序編號。</p> <p>第⑥題答案為1的1人。未看懂圖意，自行將圖中小朋友依先後順序編號。</p> <p>下圖是期中考試卷</p>	<p>第②題答案為3的5人。 第③題答案為2的5人。 第④題答案為1的2人。 第⑤題答案為4的2人。 第⑥題答案為1的2人。</p> 

		
	<p>這兩次錯誤類型都是將背號及名次混淆，因延測試卷圖案比原稿還不清楚，答錯學生反而增多。訪談時學生都能正確作答。</p>	
<p>解決 10 以內各數的分解問題：圖示、數字分解。</p>	<p>七、想想看，可以分成幾和幾？14%（每格二分）</p> <p>全對。</p>	<p>第①題分錯 1 人。 第②題分錯 1 人。 第③題答錯 1 人。 第④題答錯 1 人。 第⑤題答錯 3 人。</p>  <p>（學生對分合抽象圖示不瞭解）</p>
	<p>訪問答題錯誤學生時，有一位學生對分合抽象圖示不瞭解，其他學生皆能正確作答。</p>	
<p>解決 10 以內各數的合成問題：圖示、數字合</p>	<p>八、算算看，合起來有多少？14%（每格二分）</p> <p>第②題數錯成(6)，以致合起來結果也錯(10)，1 人。</p>	<p>第②題合起來錯誤 1 人。 兩個 () 未作答 1 人。 數錯導致合起也錯 1 人。</p>

成。		
延後測後訪問作答錯誤學生，兩名學生皆能正確作答，因此在 10 以內各數的合成沒有問題。		

柒、結果與建議

兩次施測都有學生漏題未答，這樣的情形在低年級常會發生，因此在考試時低年級導師常會耳提面命的提醒學生要注意答題，且教導學生答題及檢查策略，減少學生漏題未答之失誤。

學生在分辨 10 以內的基數和序數的意義概念上已完全瞭解，只是未看清楚题目的提示而答錯，因此在命題時要更清楚明確，才能測出學生正確的數學成就建議這題的题目可以改成：

從前面數起第 3 個	前 ○○○○○○○○○○ 後
------------	----------------

第五大題選用十種不同的蔬菜圖案，未考量學生對蔬菜之概念是否清楚，因而期中考有位學生第①題寫成 5 種（正確為 10 種），因此命題時圖案的選擇，要貼近學生經驗，力求清晰容易辨識。

第六大題的第（1）題，辨識參考物的上下左右位置的题目中，延後測後訪問學生中發現一名學童左、右概念尚未穩固，提醒教學者對該名學生進行補救教學，並以不同學習策略指導學生辨別左、右之概念，例如在右手心寫上右字，左手不寫，或在右手貼上貼紙，增強學生左、右手概念。

第六大題的第（2）題，兩次測驗的錯誤類型都是將背號及名次混淆，且延測試卷圖案比期中考的試卷圖案還不清楚，所以延後測時，答錯的學生反而增多。建議命題時可用名字代替背號或選用不同動物，而印刷時要注意圖案的清晰度。

第七大題解決 10 以內各數的分解問題：圖示、數字分解。期中考時因有考前複習，學生在分合抽象圖示，是清楚的。延後測時，沒有考前複習，有一位學生對分合抽象圖示不瞭解作答錯誤。除了對該生進行補救教學外，在教學時更要加強語言、圖像及抽象符號之間的聯結，讓學生能在數學語言文字、圖示及符號間轉譯自如。

第八大題解決 10 以內各數的合成問題：圖示、數字合成。訪問答題錯誤之學生，發現學生因未能仔細作答而答錯，在 10 以內各數的合成沒有問題。

比較第七和第八大題發現，答題錯誤學生在 10 以內各數的合成較熟練，10

以內各數的分解錯誤較多，因此日後教學時在數的分解練習時，要再讓學生多做具體操作練習並藉由書面練習單來熟練。

教師在命題時，要貼近學生的生活經驗，如檢核序數的概念時，可以選用學生排隊的經驗或玩具的排列。在分合概念的命題，宜採用「具體、半具體、抽象符號」之歷程呈現，由易而難，引導學生解題思考。

書面評量的結果，有時會受限學生解讀能力、當下情緒、考試壓力…等，學生未必能完全展現習得之概念。由於小學一年級的新生，在書面解讀能力尚在起步階段，輔以實物、圖像及例題有助於學生正確作答，教師也能確實檢核學生之學習成效。因此數學評量命題時必須考慮每一位學生的先備經驗，題目的呈現方式必須清晰、簡明以避免學生混淆或誤解，才能達成數學評量的目的。

附件一

圖三：台北東區大橋的建設工程圖。圖中標示了九個建設年度。第一至第九年。

一、數一數，有多少？在()裡寫出正確的數字。

比一比，比較多的在□中打✓。(每格2分)

① ()個 ()個

② ()個 ()個

③ ()隻 ()隻
手的手指 手的手指

二、連連看：12% (每題2分)

① ② ③

只有2個平的面 只有2個彎的面 有2個平的面，也有2個彎的面。

④ ⑤ ⑥

三、連連看：8% (每題1分)

三角 圓 正方形 正方形

圓 三角 正方形 正方形

四、按照題意圈圖看：8% (每格2分)

3個	
第3個	
第5個	
6個	

五、填一填：10% (每格2分)

①圖中，一共排了()種蔬菜。

②從左算起， 在第()個。

③從左算起， 在第()個。

④從左算起， 在第()個。

⑤從左算起， 共有()種。

六、看圖回答問題：10% (每格1分)

(1)把符號寫在正確的位置上：

例：勺在 的上面。

①欠在 的右邊。

②門在 的下面。

③口在 的左邊。

(2)看圖回答問題：

①共有()個小朋友比賽跑步。

②跑在4號前面的是()號。

③跑在1號後面的是()號。

④離最近的是()號。

⑤離最遠的是()號。

七、想想看，可以分成幾和幾？14% (每格2分)

① 5可以分成()和() 6可以分成()和()

② 4可以分成()和() 7可以分成()和()

③ 6和4合起來是()

④ 5和5合起來是()

八、算算看，合起來有多少？14% (每格2分)

① 2和1合起來是()

② 4和6合起來是()

③ 5和2合起來是()

④ 1和7合起來是()

⑤ 6和4合起來是()

⑥ 5和5合起來是()

寫完的卷子要仔細檢查：三遍！看看有沒有漏掉的？有沒有寫錯的？細心寫好哦！

祝各位大傢！考試順利！

一年級的老师们！

一年級數學月考延後測試題與評量分析

高雄市明義國小 黃智瑜 陳榴明

壹、前言：

九年一貫強調要把每一位學生都帶上來。台灣在數學教育裡，也強調每個學生都有權利要求受到良好的數學訓練，並充分認識重要的數學概念及提升厚實數學能力。所以身為教育實務工作者更應在教學場域裡提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的核心數學題材，因為這些重要的數學概念和精熟的演算能力，是九年一貫所強調「帶著走」的能力。

因此除了數學知識外，數學能力的培養也是重點。所謂「數學能力」，是指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。所以在學習數學時，學生的數學經驗(或數學感覺)的培養也是不可輕忽的一環。以一年級的加減法運算而言，除了能充分運用加減法外；更重要的是能養成簡單心算的能力，進而勇於累積計算多位數的經驗。這種能力能讓學童對數字的內在邏輯有較流暢的感覺，也更能增強學童的自信心。九年一貫中能力指標是依主題與階段的學習能力而訂定，然因多數指標須採分年教學，方能達成其教學目標。因此，97課綱由階段能力指標演繹出更細緻的分年細目及詮釋，期能明確掌握分年教學的目標。

因此本次測驗的評量試題以學校期末考的數學試題當作延後測試題，在於了解學生經由教學解說後的延後測驗中學習多少，依據評量結果分析學生學習成效與易錯誤類型。

貳、評量目標：

- 一、了解學生在此次月考試題中，數學解題的能力。
- 二、了解全班學生在此次月考試題中，易錯誤類型與迷思概念為何。

除上述評量目標外，與本評量有關之能力指標如下：

一、階段能力指標

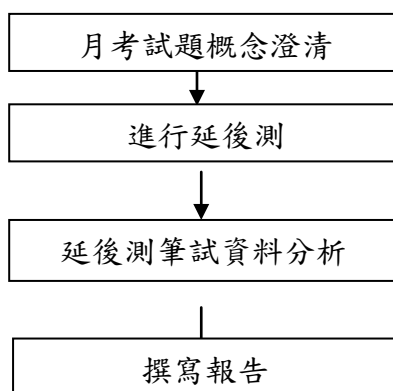
數與量	
N-1-01	能說、讀、聽、寫 1000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。
N-1-02	能理解加法、減法的意義，解決生活中的問題。
N-1-08	能做長度的實測，認識「公分」、「公尺」，並能做長度之比較與計算。
代數	
A-1-02	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律、乘法的交換律，並運用於簡化計算。

二、分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
1-n-01	能認識100 以內的數及「個位」、「十位」的位名，並進行位值單位的換算。	N-1-01
1-n-02	能認識1 元、5 元、10 元等錢幣幣值，並做1 元與10元錢幣的換算。	N-1-01
1-n-03	能運用數表達多少、大小、順序。	N-1-01
1-n-04	能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用+、-、=做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	N-1-02 A-1-01
1-n-05	能熟練基本加減法。	N-1-02
1-n-08	能認識常用時間用語，並報讀日期與鐘面上整點、半點的時刻。	N-1-11
1-n-10	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較物體的長短。	N-1-08
代數		
分年細目		對照指標
1-a-01	能在具體情境中，認識加法的交換律。	A-1-02

參、實施年級：本測驗實施對象為高雄市明義國小一年級某班 22 位學生。

肆、實施流程：



伍、評量內容：

評量單元為一年級上學期第三次月考範圍，數學單元分別是：10 以內的減法、20 以內的數和加法、幾點和幾點半。

陸、評量標準：

一年級數學加減法多數屬於基礎運算能力，評量過程包含評量學生對於數字大小、加減之概念關係；是否清楚了解應用問題的解題策略與題意，進而列出關係式。

柒、學習解題表現分析：

以下分單元列出試題中，學生易錯誤類型，並分析學生為何錯誤原因。

◎單元：10 以內的減法

題型一

題目	$9-5=(\quad)$ 	$10-1=(\quad)$
答題情形	空白未寫	空白未寫
人數	2	2
原因	漏答	漏答

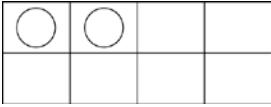
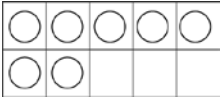
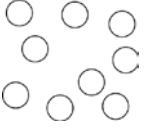
題型二

題目	<p>迴紋針比橡皮擦少了幾個？</p> <p>$6-(\quad)=(\quad)$</p> <p>迴紋針比橡皮擦少了()個。</p>
答題情形	<p>空白(1)</p> <p>第一、二格答案寫顛倒(3)</p>
人數	4
原因	<p>未看懂題意</p> <p>答案正確，但不會列關係式。</p>

題型三

<p>題目</p>	<p>小慶有 10 個甜甜圈，吃了 2 個；<u>小胖</u>有 8 個甜甜圈，吃了 5 個。 下面哪句話是對的？對的打√。</p> <p>(1) () 兩人剩的一樣多。 (2) () <u>小慶</u>剩的比較多。 (3) () <u>小胖</u>剩的比較多。</p>
<p>答題情形</p>	<p>第一、二兩格都打√ (2)</p>
	<p>第一格打√ (3)</p>
	<p>第二、三兩格都打√ (2)</p>
<p>人數</p>	<p>7</p>
<p>原因</p>	<p>不懂題意</p>
	<p>未看清題意</p>
	<p>不懂「比較多」的意思</p>

題型四

<p>題目</p>	<p>1. 一盒有 8 個○，已經裝了 2 個○，還要幾個才可以裝滿一盒？在下面圈圈看。</p>  <p>○○○○○○○○</p>	<p>2. 一盒有 10 個○，已經裝了 7 個○，還要幾個才可以裝滿一盒？在下面圈圈看。</p>  
<p>答題情形</p>	<p>直接用畫記方式畫除所需個數 (2)</p>	
	<p>空白 (1)</p>	
	<p>直接將空格以畫圈方式補滿 (1)</p>	
<p>人</p>	<p>4</p>	

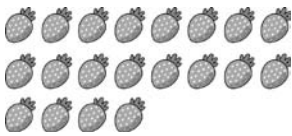

數	
原因	答案表達方式錯誤
	不懂題意
	未看清題意

◎單元：20 以內的數和加法

題型一

題目	把上排的數字加 8，填填看。											
	<table border="1"> <tr> <td>加</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	加	3	5	7	9	8					
加	3	5	7	9								
8												
答題情形	皆答錯	第一個答案對，後面全錯										
人數	1	3										
原因	超過十不會累加	把題目上排的 3.5.7.9 當成連續數字，直接累加，未看清楚題目。										



題型二

題目	<p>先把 10 個 10 個圈起來，再數數看。</p>  <p>有 () 顆 .</p>
答題情形	漏圈另一個十。
人數	2
原因	題目沒看清楚，只圈一個十。

◎單元：幾點和幾點半

題型一

題目	哪一個鐘面上的時刻在 3 點到 4 點之間？請打 <input type="checkbox"/>
----	---

	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> ①  ②  </div>
答題情形	兩格都打✓
	都寫數字3
人數	2
原因	無法辨別時間的先後
	未看懂題意

捌、分享與建議：

分別將月考及延後測的筆試資料做分析整理，以了解班級學生在月考測驗檢討後、與隔一個月後的延後測學生的答題方式與理解部分是否有所改變。

(一) 遭遇問題與困境

一年級學生在閱讀問題上常常犯的一個錯誤，就是急躁。未必全然看懂題目的意思，就急著將答案寫下，當然事後檢討就會發現是自己的缺失。閱讀與對文字的理解有很大的關連，當孩子對文字理解力不足時，當然題意就無法真正了解，所以在教學過程中，我常常提醒學生要多閱讀幾次題目，直到理解想通為止。

(二) 解決策略

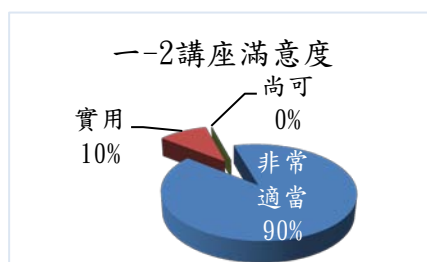
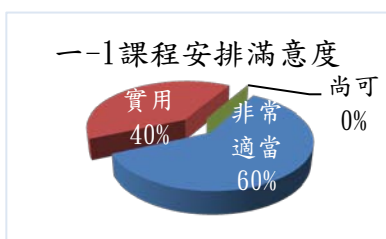
為增進閱讀理解，我會教導學生在題目旁用繪圖的方式，來協助了解題意。適時的用圖畫輔助，可以幫助學生專注，也讓學生嘗試主動解題，尋找文字間所透露的密碼，解出它的意思。另一方法就是於課堂上課時，請學生就文字內容回答老師所問的問題，多問幾次，學生就會多幾分專注與警覺，幾次下來，學生的專心度變高，且從其他同儕學生的回答中可以更了解題意，幫助解題。

高雄市國教輔導團 100 年度精進教學計畫
 數學領域 領航教師 第五期第一階段
 精進數學教學與命題工作坊 回饋表統計

一、活動課程方面

非常滿意 滿意 尚可 不滿意 非常不滿意

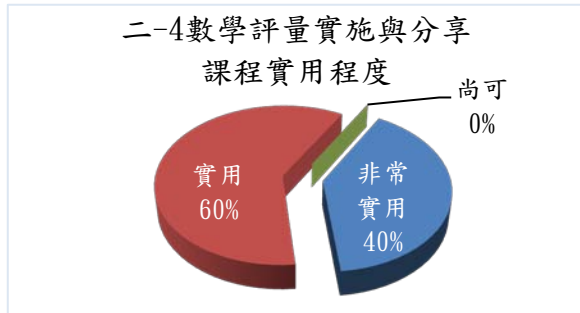
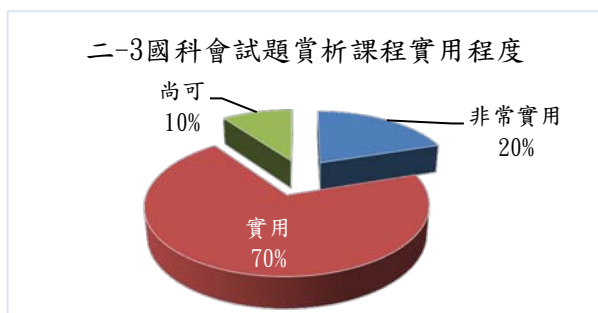
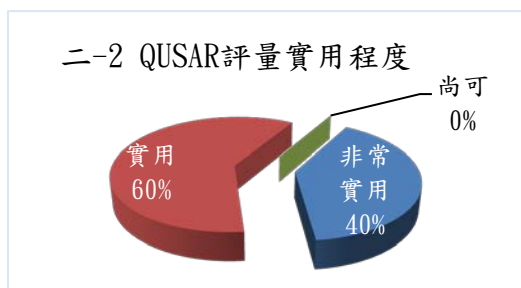
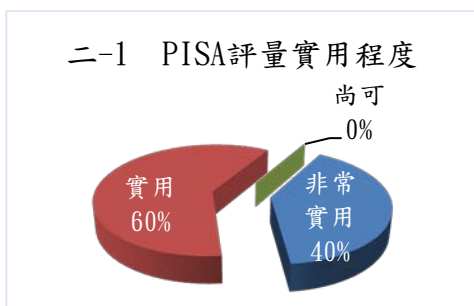
1、您對本研習課程安排之滿意程度	60%	40%	0%	0%	0%
2、您對主講者的整體表現滿意程度	90%	10%	0%	0%	0%



二、課程內容的實用程度

非常實用 實用 尚可 不實用 非常不實用

1、「PISA 評量理念、內涵之瞭解」	40%	60%	0%	0%	0%
2、「QUASAR 評量理念、內涵之瞭解」	40%	60%	0%	0%	0%
3、「國科會計畫研發之評量試題賞析」	20%	70%	10%	0%	0%
4、「數學評量實施與分享」	40%	60%	0%	0%	0%



三、研習心得及您的寶貴意見

◆ 透過試題分析歷程，使教學的試誤更少了，相信對學生的數學理解也很有幫助！
◆ 經過這堂課下來，對數學命題有更深入的了解，再對以後教學生涯中，如何去命題，有了更深刻的了解。
◆ 教學者常常會以主觀的認知加諸於學生身上，因此會有「這題很簡單」，但學生的表現不是預期的結果。所以每次評量前的試題審查很重要，要考量的事項教學者自己要很清楚要評量學生何種能力，試題如何呈現才能有效評量。評量要給孩子脈絡及熟悉的情境，學生學習成效較不失真。
◆ 對如何評分會有困擾及在說理上學生表現弱，但老師對國際的命題上也非常不熟悉。對孩子在教學路軌上，需要努力來自我充實。
◆ 對於評量有更深入的瞭解。
◆ 對教學很有幫助。

四、請問您希望下階段工作坊的研習主題或講座內容有哪些呢？您想推薦哪些教授擔任講座呢？

◆ 命題。(時間不太夠呢！)
◆ 張教授很棒，收穫很多。
◆ 數位教材、軟體介紹及應用。國外數學教育發展趨勢。
◆ 數學遊戲—許文化。資訊融入數學科教學。

高雄市國教輔導團 100 年度精進計畫
數學學習領域領航教師第五期第一階段
精進數學教學與命題工作坊研習花絮



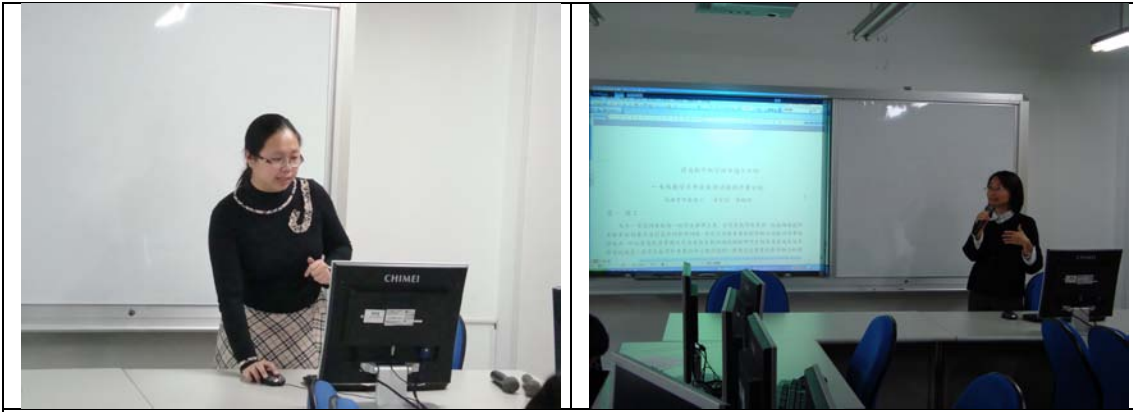
照片說明：督學室張坤錄主任開場，張英傑教授講座。



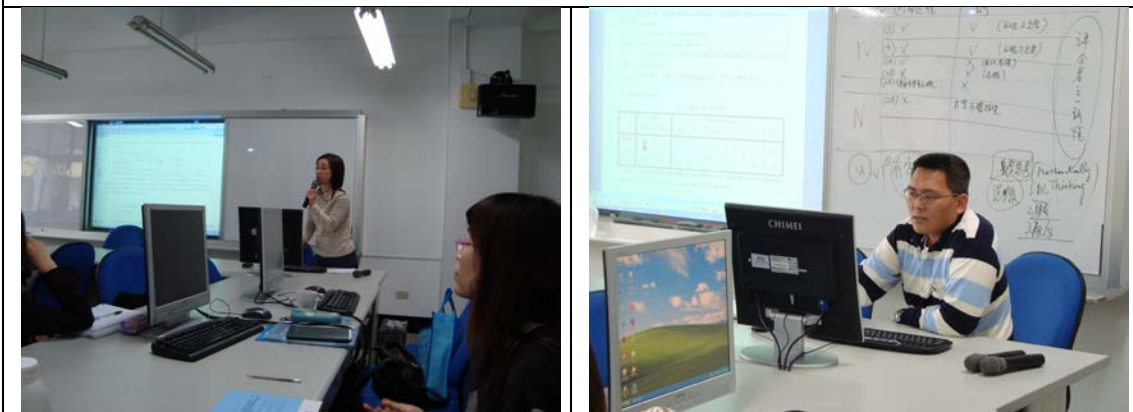
照片說明：認真聽講、專注的神情



照片說明：分組報告、熱烈參與



照片說明：學員發表工作坊作業



照片說明：學員發表工作坊作業



照片說明：張英傑教授評析學員作業、歐素雯督學總結研習成果。