

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫

數學學習領域領航教師第五期第二階段

精進數學教學與多元評量工作坊成果彙編

目錄

1. 計畫	1
2. 應用 PISA 理念設計評量試題於國小五年級學生之數學解題初探	3
3. 數學 PISA 試題評量——以三～六年級為例	13
4. 小三的挑戰——數學 PISA 試題評量	25
5. 中間鏤空立體圖的結構與體積	35
6. 四年級整數四則問題探討	44
7. 問卷回饋統計	53
8. 研習花絮	55

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫
數學學習領域領航教師第五期第二階段
精進數學創新教學與多元評量工作坊計畫

壹、依據：

- 一、教育部補助辦理精進教學要點。
- 二、高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度辦理精進教學工作計畫。
- 三、100 年 6 月 14 日高市四維教督字第 1000037490 號函

貳、目的：

- 一、引導教師深入探討數學教學及命題關鍵，增進教師命題能力。
- 二、引導教師深入探討數學創新教學與多元評量關鍵，提升教師命題實力。
- 三、藉由 PISA 和 TIMSS 的評量試題賞析，引導教師掌握國際數學評量趨勢。

參、研習內容：

- 一、數學教學及命題關鍵探討。
- 二、數學創新教學與多元評量關鍵探討與實作。
- 三、PISA 和 TIMSS 的評量試題賞析。

肆、指導單位：教育部

伍、主辦單位：高雄市政府教育局

陸、承辦單位：高雄市政府教育局國民教育輔導數學學習領域

柒、協辦單位：高雄市明義國小

捌、研習日期：8/8、8/9、8/10 三天、11/9 下午。

玖、地點：輔導團 C 棟 1 樓 C102 數位教室

(位於龍華國小舊校區內，高雄市鼓山區大順一路 570 號)。

拾、參與對象：

- 一、國小數學領域正式教師，預計錄取 40 名。
- 二、參與成員每人產出一份「數學創新教學與多元評量」作品。

拾壹、研習課程表：如二-5-3-1。

拾貳、報名方式：於 8/6 前，至「全國教師在職進修網」上網報名，網址：

<http://inservice.edu.tw/>。課程名稱：「領航教師第五期

第二階段精進數學創新教學與多元評量工作坊」研習班。

拾參、研習時數：全程參與研習者核予 21 小時研習時數，公假課務自理。

拾肆、研習經費：如二-5-3-2。

拾伍、獎勵：

- 一、全程參與數學領航教師培訓者，並完成「數學創新教學與多元評量」作品者，頒發數學領航教師證書。
- 二、參與本研習活動之相關工作人員，於研習結束後依規定敘獎。

拾陸、本計畫陳報教育局核准後實施，修正時亦同。

二-5-3-1

高雄市政府教育局國民教育輔導團 100 年度精進教學計畫

數學學習領域領航教師第五期第二階段

精進數學創新教學與多元評量工作坊

課程表

日期 時間	8/8	8/9	8/10	11/9
9:10~12:00	PISA 評量 試題賞析	TIMSS 評量 試題賞析	數學創新教學 關鍵探討	
	台南大學 林素微教授	台南大學 林素微教授	台南大學 林素微教授	
12:00~13:30	休息 (用餐)			
13:30~16:30	PISA 評量 實作與探討	TIMSS 評量 實作與探討	數學多元評量 實作與探討	數學創新教學 與多元評量 作品評析
	台南大學 林素微教授	台南大學 林素微教授	台南大學 林素微教授	台南大學 林素微教授
地 點	C102 數位教室			

應用PISA理念設計評量試題於國小五年級學生之數學解題初探

高雄市正義國小蕭合景、蘇崇賢

壹、前言

PISA (the Programme for International Student Assessment) 是一項強調基礎素養與終身學習能力的國際性標準化評量，評量對象為 15 歲學生，目的是評量學生在數學、科學和閱讀方面的素養、能力及面對成人生活的準備度 (洪碧霞, 2010)。

因此臺灣也在教育部與國科會統籌規劃之下，於 2006 年開始參與 PISA 國際學生能力評量，雖然在 2006 及 2009 年二次數學表現都相當優異，但名次卻略退步，因而此次評量結果也引起許多教育界廣泛的關注與檢討。而在參加過一些 PISA 相關研習，或閱讀過的一些報導後，皆發現 PISA 的評量試題和方式上和台灣常見的評量試題和方式有所不同。

但此時如果再重新省思九年一貫課程綱要，發現國民教育階段的課程設計應以學生為主體，以生活經驗為重心，培養現代國民所需的基本能力。其中以數學領域而言包含數、形、量概念之認知、具運算能力、組織能力，並能應用於日常生活中，了解推理、解題思考過程，以及與他人溝通數學內涵的能力，並能做與他學習領域適當題材相關之連結。而在評量方式上強調採紙筆、實測、討論、口頭回答等多樣化方式，在題型和評分標準上除以選擇題、填充題之外，有可呈現不同形式的題型，並訂定分段評分的標準，給予部份分數，達到多元和適性化的評量 (九年一貫課程綱要, 2008)。

綜觀上述說明可以發現九年一貫課程綱要，培養學生數學素養與 PISA 測驗題目所要評量學生素養是一致的，因此若能發展符合 PISA 理念設計之試題於教學上，除了提升學生的數學素養，符合九年一貫課程綱要，也有助於提升未來參與國際 PISA 評量的成效。

貳、研究目的

基於上述之問題，本研究旨在自行應用 PISA 理念設計評量試題，探討國小五年級學生在數學閱讀理解、分析、歸納能力及情意態度的情形，並應用在教學上，提升學生數學之素養。本研究的目的如下：

- 一、探討教師應如何應用 PISA 理念自行設計評量試題，瞭解學生在試題之數、量、形三種題型中，數學解題與說理的表現。
- 二、探討如何從學生的解題表現，進行補救教學，澄清學生的數學迷思概念，提升學生的數學解題與說理能力。
- 三、透過數學學習信念量表，探討教師應用 PISA 理念自行設計評量試題之方式與學生學習信念的關聯性。

參、研究方法

一、研究流程

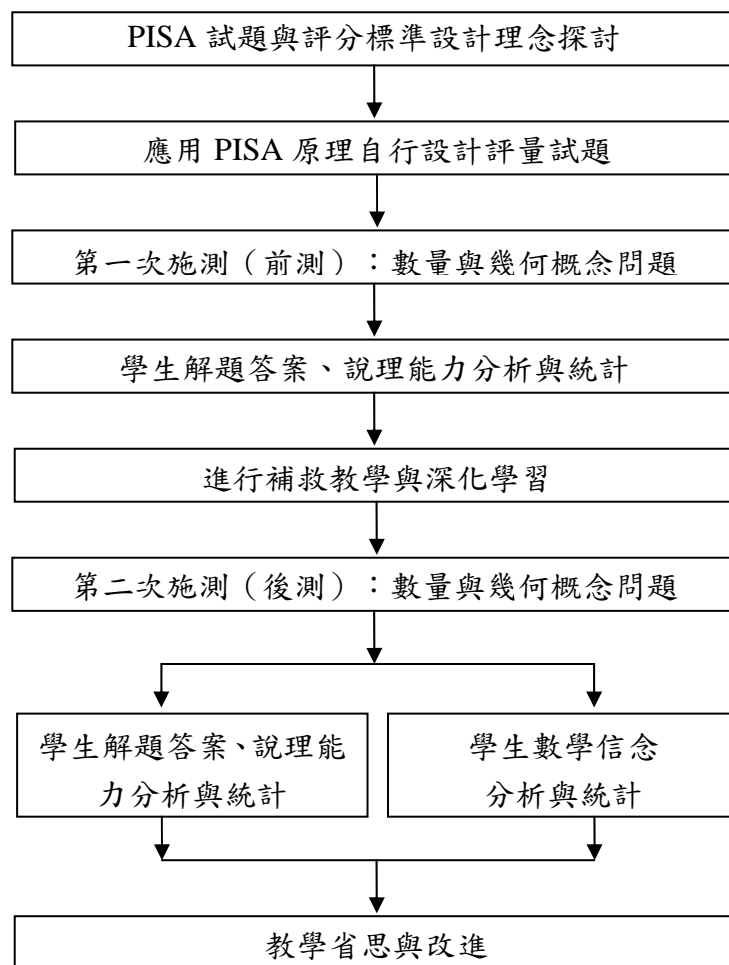


圖 1「應用 PISA 理念設計評量試題於國小五年級學生之數學解題初探」之實施流程

二、研究對象

本施測與研究對象為研究者任教學校五年級的某一個班級為主，共28位學生。

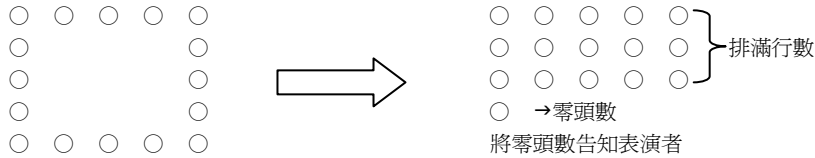
三、研究工具

(一)評量試題編製

本研究評量試題，不直接選用適合五年級學生之PISA試題，而以研究者自行設計符合PISA理念之評量試題為主。分成前測試題和後測試題，兩者題型相同，形狀則由空心正四邊形改成空心正六邊形，內容環繞某一主題，但分成四個小問題，涵蓋數量、幾何二個概念，題目篩選以「數與量概念」、「形狀幾何概念」、「能培養學生讀題能力」及「能提升學生說理能力」的題目為原則。問題（1）題目特色：屬於閱讀理解題材，解題時要求學生能處理複雜資訊，釐清題意，評量重點是學生能仿造題意說明找出答案。問題（2）和問題（3）題目特色：屬於數量、幾何題材，解題時除學生必須先知道方形形狀的幾何概念，並要求學生應用推理、分析、歸納，找出從題目中規律算出數量，評量重點是分析、歸納及說理能力。問題（4）題目特色：屬於幾何應用、說理題材，解題時除學生必須先知道圓形的幾何概念，並要求學生應用經驗推理，並進行說理，評量重點是能利用文字或符號進行說理。前測試題題目內容如下：

◆◆◆◆◆ 給零知整 ◆◆◆◆◆

表演會場上，表演者請觀眾在一個裝有許多相同「硬幣」的紙袋中，隨意取出一些硬幣。並要求觀眾利用這些硬幣，先排出一個空心的正四邊形後，再以其中一邊為基準，將其他邊的硬幣，依序對齊基準邊排列整齊，最後再將不足一行的硬幣個數（零頭數）告訴表演者後，表演者馬上輕易說中觀眾使用了多少個硬幣！以圖例說明如下：



問題1：如果觀眾將每邊6個硬幣的空心正方形，根據上述方式排列後，零頭數是多少個？使用的硬幣總數是多少？

問題2：請根據上述遊戲方式和觀眾告知表演者之零頭數，完成下表的空格。

零頭數	空心正方形每邊硬幣個數	觀眾使用的硬幣總數
1	5	16
2		
3		
4		
5		

問題3：若觀眾告訴表演者依照上述方式排列後，零頭數卻是16，此時如果你是表演者，請你說出觀眾使用的硬幣總數為何？並請解釋你的想法。

問題4：若表演者要求觀眾依據上述遊戲方式，但要排出一個空心的圓形後，再告知表演者零頭數，讓表演者說出觀眾使用之硬幣總數。此時如果你是觀眾，你覺得此種遊戲可玩嗎？並請解釋你的想法。

(二)、評量試題評分標準與代號說明

本研究為求分析與統計時順利，將PISA評分標準與代號加以簡化，不做細分，但其分段評分的標準，給予部份分數，達到多元和適性化的評量評分理念加以保留，更以上述試題評量重點的標準來評分，以掌握學生的數學表現之外，以了解學生的解題與說理的能力。說明如表1：

表1 評分標準與代號說明

問題		問題 (1)			問題 (2)	問題 (3)	問題 (4)
		作法理由說明	零頭數	總數			
標準 與 代號	0	沒有作答或完全錯誤	沒有作答或完全錯誤	沒有作答或完全錯誤	不需說明，只看答案正確與否。以格計分	沒有作答或完全錯誤	沒有作答或完全錯誤
	2	分段評分部分正確或理由合理答案有誤	分段評分部分正確或理由合理答案有誤	分段評分部分正確或理由合理答案有誤		分段評分部分正確或理由合理答案有誤	分段評分部分正確或理由合理答案有誤
	5	完全正確	完全正確	完全正確		完全正確	完全正確

(三)、數學學習信念量表編製：

本研究擷取教育部攜手計畫中學生學習信念量表之部分內容，作為本次研究的量表（如附件二），且於教師進行全班性之補救教學，完成第二次施測（後測）之後，由研究者說明進行該量表之填答，以了解學生對於教師應用PISA理念自行設計評量試題進行教學與學生學習信念的關聯性。其量表主要分為三個向度，分別為數學素養信念5題、數學教學與學習信念5題、社會脈絡信念5題，共計15題。

肆、學生之解題表現分析

一、為了瞭解國小學生對於試題的熟悉程度，與具備的數學素養為何，教師再進行教學之前，先對學生實施前測，其表現情形以次數分配統計各問題評分代號人數之百分比加以分析，茲將其整理如表2所示：

表2 前測各問題評分代號人數之百分比一覽表

問題		問題 (1)						問題 (2)		問題 (3)		問題 (4)	
		作法理由說明		零頭數		總數		人	百分	人	百分	人	百分
評分	代號	人	百分	人	百分	人	百分	人	百分	人	百分	人	百分
5		10	36%	9	32%	8	29%	6	21%	3	11%	13	46%
2		2	7%	0	0%	0	0%	3	11%	1	4%	2	8%
0		16	57%	19	68%	20	71%	19	68%	24	85%	13	46%

對於問題 (1) 屬於閱讀理解題材，由表2可知有36%的學生達到要求的水準，有57%的學生未達到要求的水準。顯示該班學生對於文字敘述多量，資訊複雜的題目，所需進行閱讀、理解、處理複雜資訊，釐清題意的能力，仍顯不足，有改進的空間。另發現在完成正確的人

中，若懂得以圖畫方式進行解題策略的學生，對問題（1）後續的解題是有幫助的，顯示利用畫圖釐清題意是一種有效的解題策略。

問題（2）屬於數量、幾何題材，由表2可知有21%的學生達到要求的水準，有11%的學生部分達到要求的水準，有68%的學生未達到要求的水準，顯示該班學生對於利用類比推論，尋找解答的能力，仍顯不足，有改進的空間。

問題（3）則屬於數量應用題材，由表2可知有11%的學生達到要求的水準，有4%的學生部分達到要求水準，有85%的學生未達到要求的水準，顯示該班學生從規律的數字中進行分析、歸納找出規則，進行解題的能力，仍顯不足，有改進的空間。

另由表2可知問題（3）答對的比率比問題（2）答對的比率更少，問題（2）答對的比率比問題（1）答對的比率少，顯示題目類型有由簡到難的層次順序，但相對的學生也必須具備的更多元化的解題能力，而非單一能力，才能進行解題。

至於問題（4）屬於幾何說理題材，由表2可知有46%的學生達到要求的水準，有8%的學生部分達到要求的水準，有46%的學生未達到要求的水準，但在答錯的13位學生中，只有3位沒有作答，但因沒有進行個別訪談，無法得知原因為何，而另10位學生，都能以文字語言來表達自己的想法，顯示本班學生已了解數學不僅只有數字、數學符號使用的答題方式，有時文字語言的說明，也是一種數學的答題方式。另外這些答錯的學生，從解題分析中發現這些學生不能理解該題題意，至於是否了瞭圓形沒有邊的概念，也因沒有進行個別訪談，無法得知。

二、教師於前測後不久，利用一節課時間，直接針對前測試題做說明外，並利用實物花片操作，進行師生對話討論的補救教學與深化學習，再對學生實施後測(附件一)，其表現情形以次數分配統計各問題評分代號人數之百分比加以分析，茲將其整理如表3所示：

表3 後測各問題評分代號人數之百分比一覽表

問題 評分 代號	問題 1						問題 2		問題 3		問題 4	
	作法理由說明		零頭數		總數		人 數	百分 比	人 數	百分 比	人 數	百分 比
	人 數	百分 比	人 數	百分 比	人 數	百分 比						
5	8	29%	11	39%	14	50%	16	57%	8	29%	25	89%
2	11	39%	0	0%	0	0%	9	32%	3	11%	0	0%
0	9	32%	17	61%	14	50%	3	11%	17	61%	3	11%

並將表2和表3合併整理成表4之外，也利用excel將表4轉換成折線圖，圖2~圖7以供分析。

表4 前測與後測各問題評分代號人數之百分比比較一覽表

問題 評分 代號	問題 1						問題 2		問題 3		問題 4	
	作法理由說明		零頭數		總數		前測	後測	前測	後測	前測	後測
	前測	後測	前測	後測	前測	後測						
5	36%	29%	32%	39%	29%	50%	21%	57%	11%	29%	46%	89%
2	7%	39%	0%	0%	0%	0%	11%	32%	4%	11%	8%	0%
0	57%	32%	68%	61%	71%	50%	68%	11%	85%	61%	46%	11%

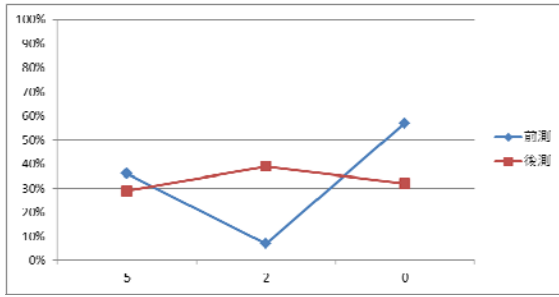


圖 2 前測與後測問題 1-1 答題人數統計百分比

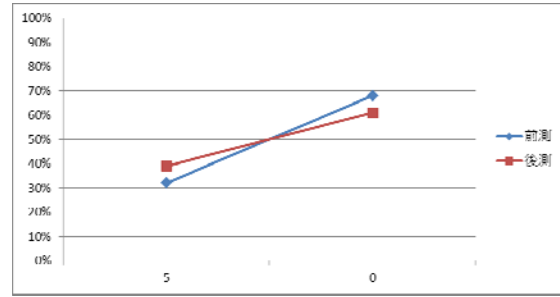


圖 3 前測與後測問題 1-2 答題人數統計百分比

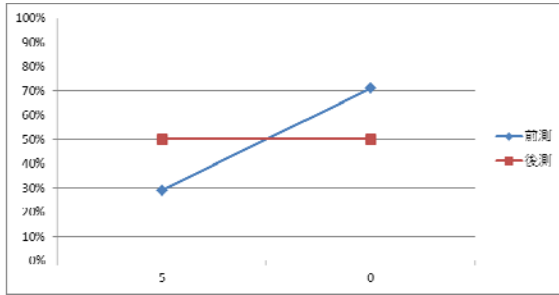


圖 4 前測與後測問題 1-3 答題人數統計百分比

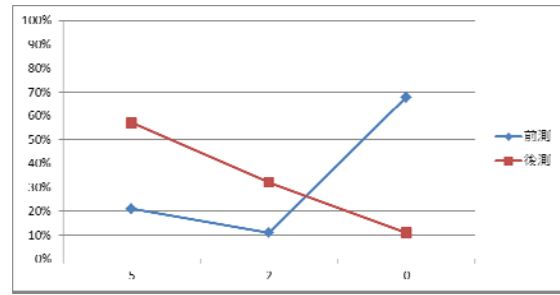


圖 5 前測與後測問題 2 答題人數統計百分比

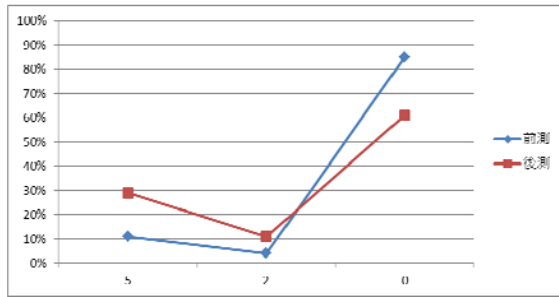


圖 6 前測與後測問題 3 答題人數統計百分比

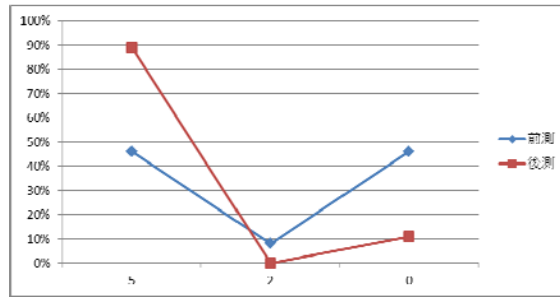


圖 7 前測與後測問題 4 答題人數統計百分比

由表4和相關的折線圖中發現該班學生對問題(1)以圖畫方式釐清題意，進行解題，而完全正確學生的表現比率是降低的，這可能是因為後測題目是空心正六邊形比前測空心正四邊形，更難以畫圖所致，因為若是從答錯學生的解題分析中，就可以發現想利用畫圖釐清題意，進行解題的人數9人則比前測時5人增加，顯示學生經過補救教學與深化學習之後，以開始了解和接受畫圖可以幫助解題。而對於問題(2)等其他問題，答對學生的比率都有明顯增加，且每個問題答錯學生的比率都降低，顯示經過教師實施試題說明，補救教學與深化學習後，學生已能理解題意，並能應用分析、歸納的能力完成解題。

伍、學生數學學習信念分析

為了解教師說明試題涵義，進行補救教學與深化學習，學生後測表現和數學素養信念、數學教學與學習信念、社會脈絡信念的關係，將15個問題以次數分配統計之百分比加以分析，茲將其整理如表5所示：

表5 數學學習信念次數分配統計之百分比一覽表

		我同意		我不確定		我不同意	
		人	%	人	%	人	%
數學素養信念	1、學校所學的數學知識，在日常生活中是很少用得到。	8	28.57	9	32.14	10	35.71
	2、數學很多主要就是認識數學符號並能準確計算。	21	75.00	4	14.29	2	7.14
	3、用心思考通常能想出解決數學問題的方法。	21	75.00	4	14.29	1	3.57
	4、很多學科例如自然或社會，也會用到數學知識。	19	67.86	4	14.29	3	10.71
	5、考試時獲得好成績表示數學能力比較好。	6	21.43	9	32.14	12	42.86
數學教學與學習信念	1、以前沒看過的題目，我會努力想出解決的方法。	17	60.71	9	32.14	1	3.57
	2、解題就是將題目中的數字加以運算，就可以得到正確答案。	17	60.71	6	21.43	4	14.29
	3、一個數學題目如果在3~5分鐘內想不出解決方法，那麼想再久也沒有用。	2	7.14	5	17.86	20	71.43
	4、一個數學問題只有一種正確的解決方法。	4	14.29	7	25.00	16	57.14
	5、學習數學最重要的是學習怎樣思考。	23	82.14	2	7.14	2	7.14
社會脈絡信念	1、解決數學問題最好獨自思考，不要和別人討論。	0	0.00	6	21.43	21	75.00
	2、如果自己的作法錯誤，討論時會被同學取笑。	4	14.29	6	21.43	17	60.71
	3、瞭解別人解決數學問題的方法是很有意思的。	23	82.14	3	10.71	0	0.00
	4、我會認真理解與自己不同的數學想法。	20	71.43	7	25.00	0	0.00
	5、說出自己的數學解題方法時，常使我想得更為清楚	17	60.71	7	25.00	3	10.71

- 一、經過師生對話討論的補救教學和前後測評量之後，在數學素養信念部份，75%的學生，認為解決數學問題的方法是用心思考，並利用數學符準確計算。但對於數學知識在日常生活中用得到的信念部分，能無法體認出來，這有可能是學生較少接觸到教師以日常生活為主題所出的試題造成。
- 二、經過師生對話討論的補救教學和前後測評量之後，在數學教學與學習信念部份，有半數以上的學生，認為學習數學就是在學習怎樣思考，對於問題會努力想出解決的方法，對於問題也認為有許多不同的解法。在後測問題(3)答對學生8個人的解題分析中，發現三種解題想法，而大部分的學生在短間時內還是想不出解決方法，隨意將題目上的數字運算作答。
- 三、進行師生對話討論的補救教學和前後測評量之後，在社會脈絡信念部份，有60%以上的學生，認為和別人討論數學問題，一起解決問題，對自己是有助的。

陸、分享與建議

- 一、教師若要直接使用PISA評量試題進行教學測驗時，宜慎選題目應用。因此教師宜主動接觸了解PISA 理念精神，分析試題所需的數學概念，選擇配合學生概念和經驗的試題，再適時由淺而深的運用於教學中，了解學生的迷思，並協助學生習慣開放式的問題。
- 二、PISA評量試題從題目生活化、趣味化，到問題開放、多元、題組化，題型多樣化，是屬

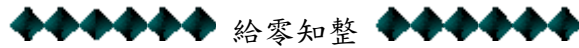
於非典型的試題，有別於國內傳統常見的試題方式，對於孩子來說是陌生的，比較容易產生恐懼，放棄的心理壓力，在教學上教師應該去引導學生整合舊經驗找出答題的方式，讓孩子有天馬行空想出答案的勇氣，讓孩子的學習由被動，被規範的歷程轉成主動創造、積極鼓勵的歷程。

- 三、對於國內教師，PISA評量試題雖然是一個新的評量方式，但PISA測驗題目所要評量學生素養其實和九年一貫課程綱要，培養學生數學素養是一致的。因此研究者認為教師欲培養學生推理、分析、思考，說理以及與他人溝通數學內涵的能力，應該在數學教學，和評量上去努力創新和求變即可，而不一定直接使用PISA評量試題進行教學或測驗。
- 四、目前在教學過程中，教師解題說明的時間仍佔教學時間的大部分，因此學生除了「聽」「算」外，「說」的練習是不足的，不但無法說理，甚至連說的勇氣都沒有。由此教師在教學上應求變和創新，提供有安全感的環境，加強學生練習系統化的陳述，且能用精確的數學語言進行「說」的能力，才能讓學生言之有物，不會老是說不到重點。
- 五、在學習信念量表中，發現大部分的學生都認為和他人合作、討論，對自己的數學學習更有幫助。但教學現場中，有許多學生顯然對於學習沒有反思的能力，因此無法說出自己解題的過程。教師應在教學時應加強學生後設思考能力的訓練，多給學生嘗試、討論、表達、同儕教學與學習的機會，使學生對於自己學習狀況更能掌握。
- 六、從補救教學師生討論互動中，發現大部的學生對這類題型的教學與測驗是有興趣，認為對他們的學習是有幫助的，因此老師可於教學過程多融入這類題型，除培養他們的能力外，更可以引起學習動機。
- 七、教師於熟悉PISA理念精神後，也可應用或簡化PISA試題方式，自行設計與教學內容有關聯，但用詞淺白，題材生活化的評量試題，讓學習練習，如此不僅能達到教學目標，培養學生數學素養，了解學生學習成效，也能讓學生在未來更能面對及處理非典型的問題或PISA題型。
- 八、學生的學習成效，並非一致，有快慢之別，個別化的現象。但在此次研究者發現補救教學是有效的，所以教師應多花點時間，針對全班或個案進行補救教學，雖然過程會比較辛苦，但是對提升學生的能力絕對是值得的。

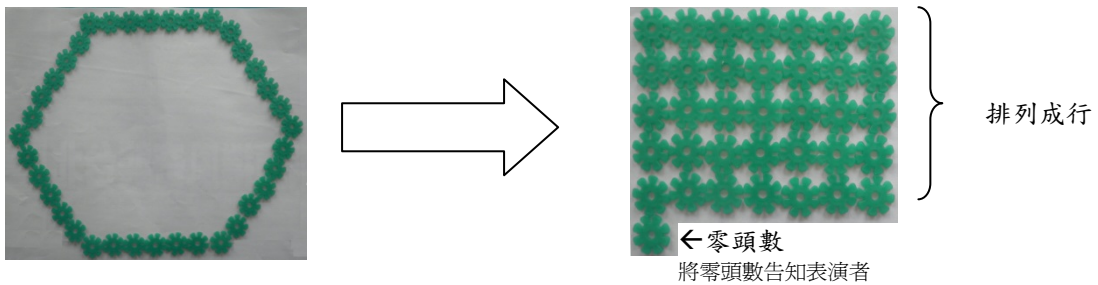
參考文獻

- 林素微(2011)。數學創新教學關鍵探討。未出版。2011年8月10日，取自高雄市國教輔導團精進數學教學與命題工作坊上課講義。
- 高雄市政府教育局(2011)。精進數學教學與命題工作坊成果彙編。高雄市政府教育局。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。教育部。
- 張秋林(2002)。數學魔幻謎題：為你展示奇妙的數學世界。臺北市，林鬱文化。

附件一



表演會場上，表演者請觀眾在一個裝有許多相同「花片」的紙袋中，隨意取出一些花片。並要求觀眾先利用這些隨意取出的花片，排出自己心中的一個空心正六邊形後（排出後多餘的花片放回紙袋中），再選定以所排出的空心正六邊形其中的一邊為基準，將其他邊的花片，依序對齊選定的基準邊排列整齊，最後再將不能完整排列成一行的花片個數（簡稱零頭數）告訴表演者後，表演者卻能馬上輕易說中觀眾使用了多少個花片！以花片圖例排列說明如下：



問題1：如果觀眾已利用花片排出每邊8個花片的空心正六邊形，在根據上述表演方式排列整齊後，不能完整排列成一行的花片個數（簡稱零頭數）是多少個？使用的花片總數又是多少？

問題2：請根據上述表演方式，完成下表的空格。

零頭數	空心正六邊形每邊花片個數	觀眾使用的花片總數
1	7	36
2		
3		
4		
5		

問題3：若觀眾告訴表演者依照上述表演方式排列後，零頭數卻是20，此時如果你是表演者，請你說出觀眾使用的花片總數為何？請務必解釋你的想法。

問題4：若表演者要求觀眾依據上述表演方式，排出一個空心的圓形後，再告知表演者零頭數，讓表演者說出觀眾使用之花片總數。此時如果你是觀眾，你覺得此種遊戲可玩嗎？請務必解釋你的想法。

數學學習信念量表

基本資料：姓名：.....

班級：.....年.....班.....號

各位同學，這個量表是爲了瞭解你學習數學的情形，答案沒有對錯，請放心答題。仔細閱讀下面每個題目，再從下面的選項中選出一個和自己想法和感覺最接近的選樣，然後在□打✓。注意！每一個答案都要回答，不要遺漏任何題目！

【數學素養信念】

- | | 我
同
意 | 我
不
確
定 | 我
不
同
意 |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1、 學校所學的數學知識，在日常生活中是很少用得到。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2、 數學很多主要就是認識數學符號並能準確計算。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3、 用心思考通常能想出解決數學問題的方法。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4、 很多學科例如自然或社會，也會用到數學知識。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5、 考試時獲得好成績表示數學能力比較好。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

【數學教學與學習信念】

- | | 我
同
意 | 我
不
確
定 | 我
不
同
意 |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1、 以前沒看過的題目，我會努力想出解決的方法。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2、 解題就是將題目中的數字加以運算，就可以得到正確答案。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3、 一個數學題目如果在 3~5 分鐘內想不出解決方法，那麼想再久也沒有用。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4、 一個數學問題只有一種正確的解決方法。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5、 學習數學最重要的是學習怎樣思考。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

【社會脈絡信念】

- | | 我
同
意 | 我
不
確
定 | 我
不
同
意 |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1、 解決數學問題最好獨自思考，不要和別人討論。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2、 如果自己的作法錯誤，討論時會被同學取笑。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3、 瞭解別人解決數學問題的方法是很有意思的。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4、 我會認真理解與自己不同的數學想法。 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5、 說出自己的數學解題方法時，常使我想得更爲清楚 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

數學 PISA 試題評量——以三～六年級為例

高雄市前金國小 謝紫湄

壹、前言

初次看到 PISA 試題，看到有那麼多試題需要運用思考、理解及分析等能力才能有效解決時，很令人心動，雖然這些試題的施測對象是國二的學生，但筆者還是想知道國小階段的孩子，有多少人已具備這些解題及說理能力，所以試著從 PISA 試題樣本中，選一題頗有難度的題目——旋轉建築物，讓學生實際施測看看；此外筆者也想知道不同年級的孩子，他們在空間概念上的差異性是否有很大不同，所以這次施測的對象涵蓋三～六年級。

貳、評量目標

- 一、了解學生解決 PISA 評量問題的解題表現。
- 二、了解學生錯誤解題的思考模式與類型。
- 三、了解不同年級孩子解題表現的差異性。

參、實施年級

本試題評量實施年級與對象為高雄市前金國小三～六年級管樂班的學生，總計有 92 位學生參與，其中包含 26 位三年級學生、24 位四年級學生、13 位五年級學生及 29 位六年級學生。

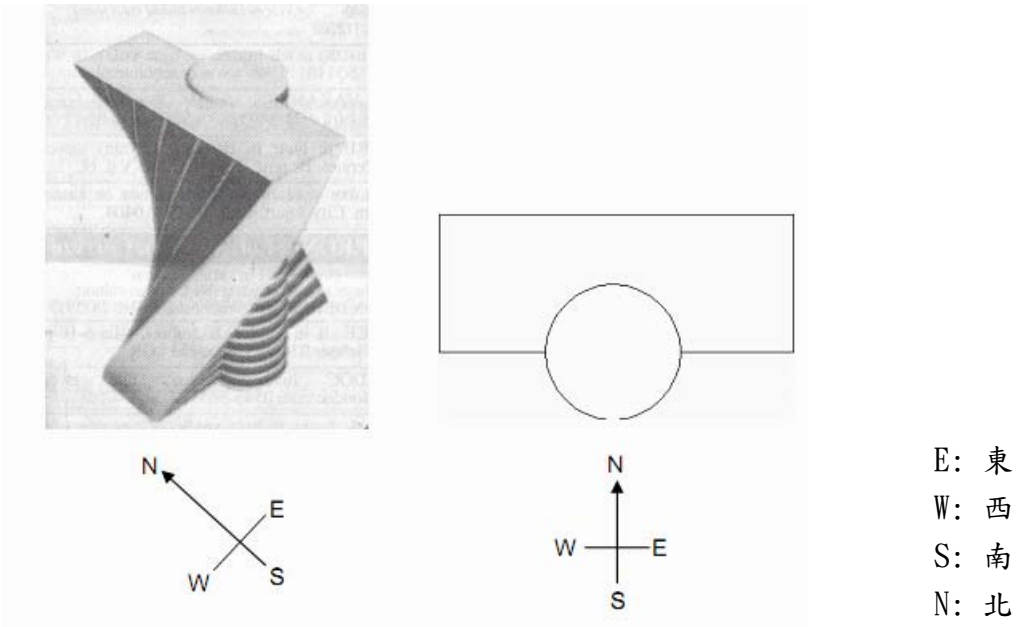
肆、實施流程

- 一、選定評量題目。
- 二、介紹 PISA 試題的背景。
- 三、進行 PISA 紙筆評量。
- 四、以 PISA 評分規準分析學生解題表現。
- 五、評量資料數位建檔。
- 六、補救教學。

伍、評量內容

◆◆◆◆◆ 旋轉建築物 ◆◆◆◆◆

在現代建築風格中，建築物通常會有不規則的形狀。下圖呈現一個「旋轉建築物」的電腦模型和一樓的樓面設計。下圖指針的指向是建築物的方向。



建築物的一樓包含了主要的入口和商店。在一樓之上還有另外20層的公寓。

每一樓層的平面設計圖都與一樓的平面設計相似。但每一層之間的方向都有一些差異。圓柱部分則是電梯和各層樓的陽台。

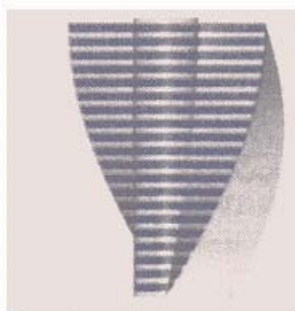
問題 1：旋轉建築物

以公尺為單位，估算建築物的總高度，並解釋你如何得到答案。

答：

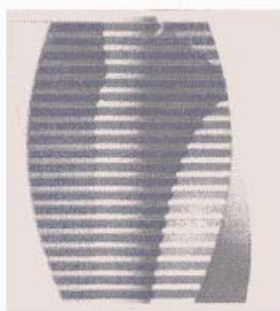
建築物總高度估算值 (單位：公尺)	請解釋你如何得到答案

以下兩個圖是這座建築物的側面圖。



Sideview 1

側面 1



Sideview 2

側面 2

問題 2：旋轉建築物

「側面 1」是從哪一個方位畫出來的？

- A 從北方 B 從西方 C 從東方 D 從南方

答：()

問題 3：旋轉建築物

「側面 2」是從那一個方位畫出來的？

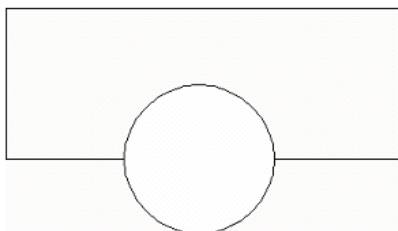
- A 從西北方 B 從東北方 C 從西南方 D 從東南方

答：()

問題 4：旋轉建築物

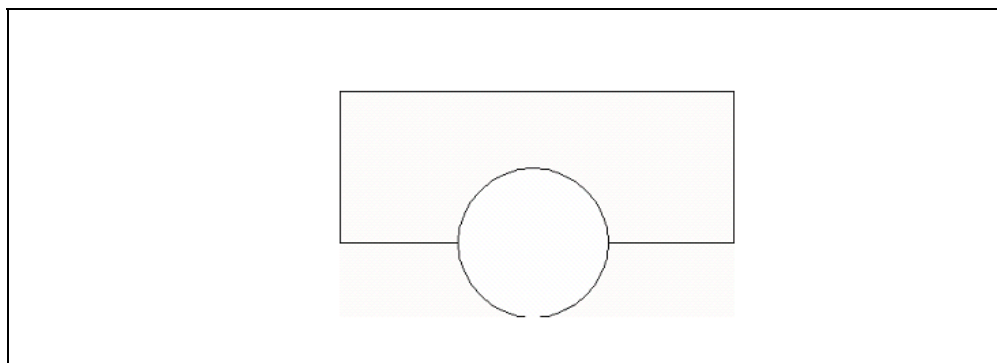
每一公寓樓層和一樓相較之下都有固定的「旋轉」。頂樓(一樓之上的第二十層樓)和一樓方向互為直角。

下圖是一樓的平面圖。



在這個圖上畫出一樓之上的第 10 層樓的平面圖，並顯示此層樓相對於一樓的位置。

答：



陸、評量標準

問題 1 評量標準	
滿分	代號 2：正確答案範圍在50到90公尺，且包含下列正確解釋： <ul style="list-style-type: none"> • 建築物一層大概高2.5公尺。每層樓之間還有額外的空間。因此估計會有$3 \times 21 = 63$公尺高。 • 假設每層樓高4公尺，所以20層樓會有80公尺，再加上一樓高度有10公尺，所以總高度是90公尺。
部分分數	代號 1：正確的計算方法和解釋，但計算的樓層數是20而不是21。 <ul style="list-style-type: none"> • 每層樓的高度可能是3.5公尺，20層樓的總高度就是70公尺。
零分	代號 0：其他答案，包含沒有任何解釋，其它不正確的樓層數，或以不合理的樓層高度做估計（4公尺是上限） <ul style="list-style-type: none"> • 每層樓的高度大概5公尺，所以5×21就是105公尺。 • 60公尺
零分	代號 9：沒有作答
問題 2 評量標準	
滿分	代號 1：C 從東方
零分	代號 0：其他答案
零分	代號 9：沒有作答
問題 3 評量標準	
滿分	代號 1：D 從東南方
零分	代號 0：其他答案
零分	代號 9：沒有作答
問題 4 評量標準	
滿分	代號 2：正確的圖形表示正確的旋轉點，與逆時針旋轉。可接受的角度從 40° 到 50° 。

部分分數	代號 1： 旋轉角度，旋轉點，或旋轉方向有1個錯誤。
零分	代號 0： 其他答案
零分	代號 9： 沒有作答

柒、學生之解題表現分析

三～六年級學生解題表現分析如下表：

表 1：問題 1 之各年級評量表現

		三年級	四年級	五年級	六年級
滿分		15.4% (備註 1)	8.3%	7.7%	10.3%
部分分數		7.7%	8.3%	15.4%	10.3%
零分		76.9%	83.4%	76.9%	79.4%
零分細項	答對但沒解釋	27.0%	8.3%	15.4%	3.4%
	其他答案	57.7%	41.7%	61.5%	41.4%
	沒有作答	7.7%	33.3%	0%	34.5% (備註 2)

學生普遍不習慣做說明，所以滿分比率偏低；而少數學生因為題目沒有看清楚，所以只專注在 20 層樓，沒注意是一樓之上還有”另外” 20 層的公寓，也因此有少數學生只能得到部分分數；至於大部分學生對於一層樓高度大約平均 2.5 公尺~4 公尺的量感並不清楚，所以回答其他答案的還滿多的。

備註 1：三年級學生在測試時，因為有學生反應很難、不會算，沒想

到班上有一名沒遵守考場規矩的學生竟然脫口說出”很簡單啊！一層樓就是3公尺啊！”的話語，筆者沒想到會有人在考試當中說出和考試相關的話語，所以來不及阻止，筆者認為這句話影響很大，它讓少數三年級學生對於一層樓高度的量感更加確認，這應該是問題1中，三年級表現優於其他年級的原因。

學生正確(及部分對)解題示例萃取		學生錯誤解題示例萃取	
建築物總高度估算值 (單位:公尺) $3 \times 21 = 63$ A:約63 m ✓	請解釋你如何得到答案 一般建築物,每一層樓大約是3公尺高。 ✓	建築物總高度估算值 (單位:公尺) 40 m ✗	請解釋你如何得到答案 一樓大約2公尺,有20層所 $2 \times 20 = 40$ ✗
建築物總高度估算值 (單位:公尺) 75 公尺 ✓	請解釋你如何得到答案 我覺得20層的公寓如果每一層有3公尺共60公尺加上一樓的15公尺共75公尺。 ✓	建築物總高度估算值 (單位:公尺) 21公尺 ✗	請解釋你如何得到答案 因為有21層樓 ✗
建築物總高度估算值 (單位:公尺) 64 m ✓	請解釋你如何得到答案 一樓為4公尺其他層樓為3公尺 ✓	建築物總高度估算值 (單位:公尺) 200 m ✗	請解釋你如何得到答案 一層樓=10公尺 所以 10×20 (層樓) $=200$ ✗
建築物總高度估算值 (單位:公尺) 60公尺 ✓	請解釋你如何得到答案 層樓3公尺 $3公尺 \times 20層 = 60公尺$ ✗	建築物總高度估算值 (單位:公尺) 3公尺 ✗	請解釋你如何得到答案 一層樓大約3公尺 ✗

表2：問題2之各年級評量表現

	三年級	四年級	五年級	六年級
滿分	26.9%	20.8%	23.1%	55.2%
零分	73.1%	79.2%	76.9%	44.8%

三~五年級學生在此題的表現差異並不大，六年級學生在此題的表現較優異，可見六年級學生確實比三~五年級學生的空間概念還清晰。

表 3：問題 3 之各年級評量表表現

	三年級	四年級	五年級	六年級
滿分	38.5%	25%	38.5%	44.8%
零分	61.5%	75%	61.5%	55.2%

原以為問題 3 比問題 2 複雜，沒想到三～五年級學生在問題 3 的表現反而比問題 2 還好，倒是六年級學生的表現與其他年級恰恰相反，真是難以預料！

表 4：問題 4 之各年級評量表表現

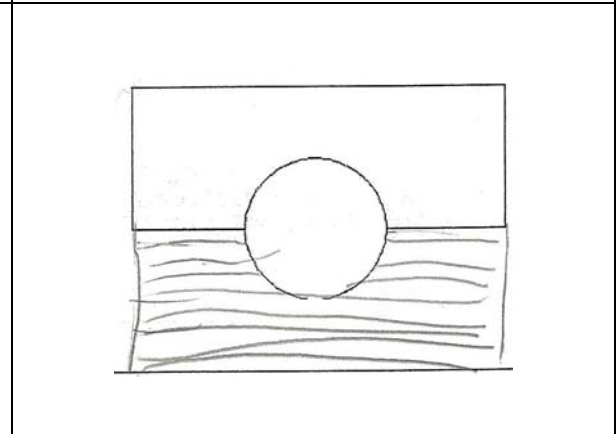
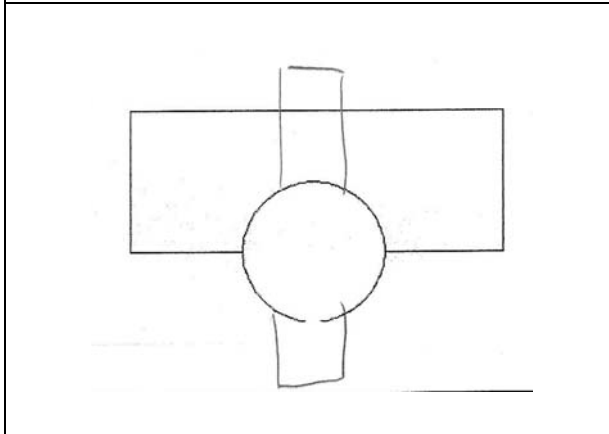
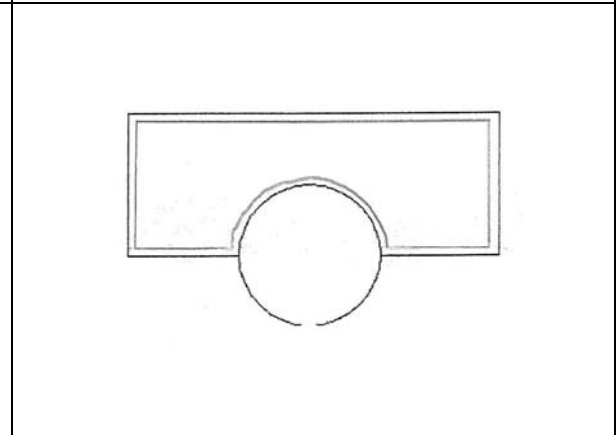
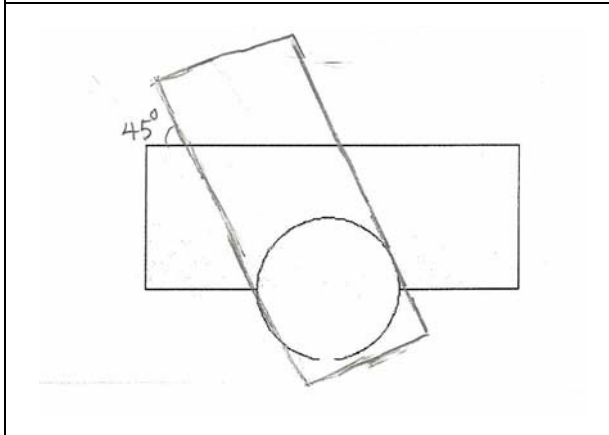
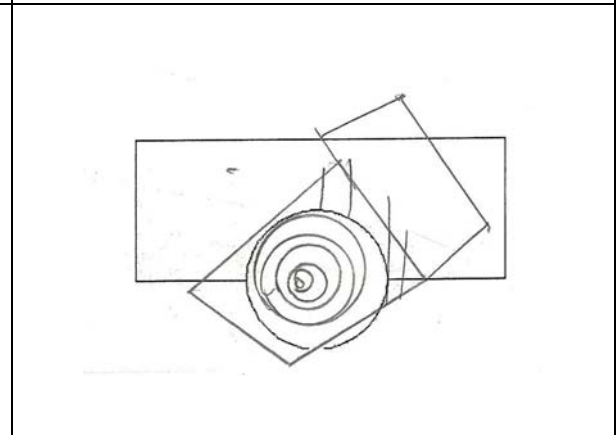
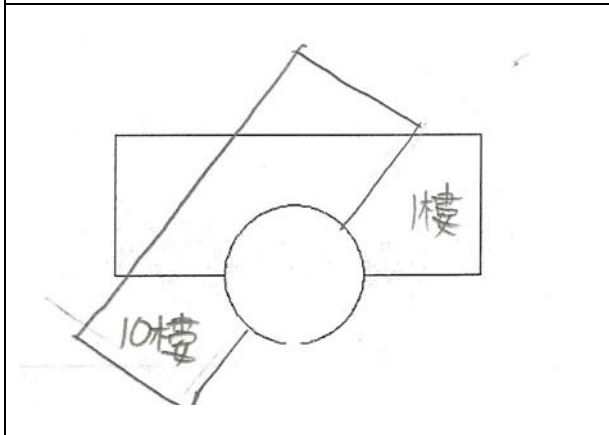
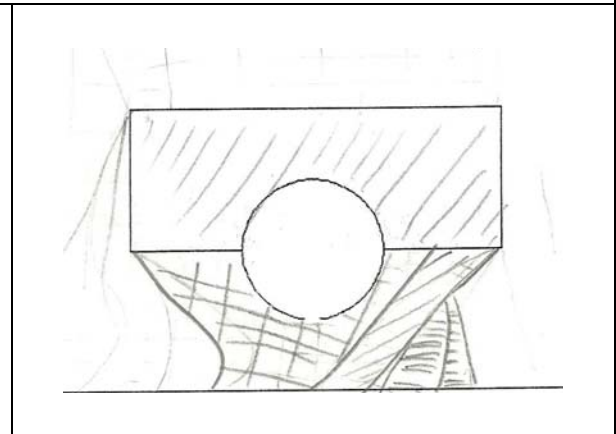
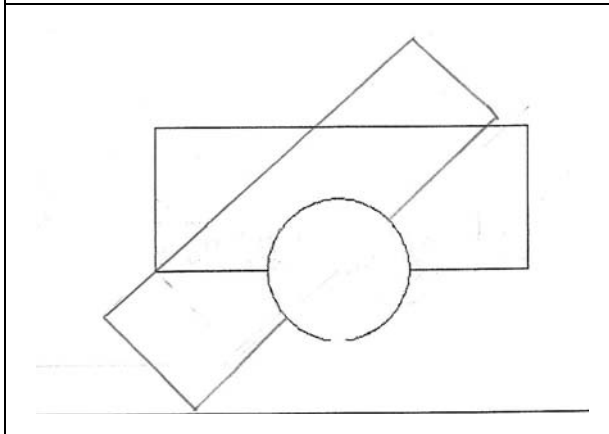
		三年級	四年級	五年級	六年級
滿分		0%	0%	38.5%	17.2%
部分分數		0%	0%	7.7%	6.9%
零分		100%	100%	53.8%	75.9%
零分 細項	其他答案	57.7%	54.2%	46.1%	17.2%
	沒有作答	42.3%	45.8%	7.7%	58.7% (備註 3)

三、四年級學生幾乎完全看不懂問題 4 要問什麼，也不知道要如何呈現答案，所以很多人沒有作答；而且施測時三、四年級學生還沒有教過”角度”的概念，所以全部都得零分並不意外；五、六年級學生有一部分懂得呈現平面圖，其中有少數旋轉方向錯誤，所以只能得部分分數。

備註 2&3：筆者的學生是三年級，其他四～六年級學生是委託各班老師施測，其中六年級作答最隨性，有很多「沒有作答」的情形出現，因此嚴重影響他們的評量表表現，這個現象在問題 1&問題 4 最明顯。




學生正確(及部分對)解題示例萃取

學生錯誤解題示例萃取



捌、補救教學與深化學習

一、補救教學：

	
1. 準備材料	2. 製作立體圖形
	
3. 分組討論及研究	4. 分組討論及研究

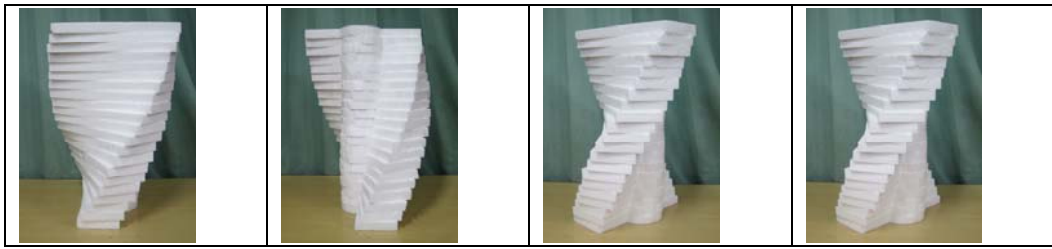
二、深化學習：

方式：

1. 設計學習單，讓學生將旋轉建築物不同角度側面圖的圖卡，放入學習單中適合的位置。
2. 製作旋轉建築物不同角度側面圖的圖卡，讓學生輪流拼排。


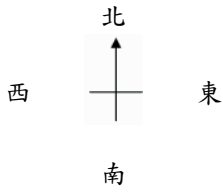
側面圖的圖卡：





◆◆◆◆◆ 旋轉建築物之學習單 ◆◆◆◆◆

◎請將旋轉建築物不同角度的側面圖圖卡放入它適合的位置。

從西北方所見	從北方所見	從東北方所見
從西方所見	 	從東方所見
從西南方所見	從南方所見	從東南方所見

2. 學生輪流拼排的情形：

	
<p>學生輪流拼排</p>	<p>學生輪流拼排</p>
	
<p>10 號學生第一次 只拼對 2 個方位。 (東北方及西方)</p>	<p>對的保留，錯的重排， 10 號學生直到第三次 才拼對 8 個方位。</p>

玖、分享與建議

分享一：筆者的學生是三年級，三年級的學生最可愛，因為筆者在施測前有先介紹 PISA 試題的背景（其他四～六年級三個班沒有介紹），所以他們有強烈的慾望想試試自己的實力，作答態度也很積極、認真，可惜他們尚未學習角度教材等，所以問題 4 對他們而言較困難。雖然他們知道自己考得並不理想，但是考完後，他們除了急著想知道正確答案是什麼？也想知道什麼時候可以拿試卷回家跟家人分享，讓家人也有機會試試這麼有挑戰性的題目，甚至還有人希望可以再多試試其他試題，積極的態度令人感動，將來有機會一定會讓他們繼續挑戰其他有趣的試題，也希望藉此提升他們解題與說理能力，讓他們可以跟國際接軌。

分享二：筆者從三年級的表現中發現，老師對學生的影響力很大，因為適時的引導不僅可提高學生嘗試解題的意願，而且不怕失敗還願意繼續挑戰更難的試題，希望今後還能帶給學生更多正向的影響。

分享三：筆者雖然沒有看到其他四～六年級學生的作答情形，但筆者知道五年級老師是一位要求較嚴謹的老師，所以從問題 1 中五年級學生完全沒有「沒有作答」的情形出現，就可以看出，所以老師對於考試的要求及規範，也會影響學生的作答，當學生認真作答時，對於測試比較有幫助，因為可以收集到較精緻的數據。

分享四：補救教學時，看到小朋友在進行分組討論的問答都沒問題(討論的題目即原評量內容)，原以為小朋友對旋轉建築物已經很熟悉，結果在進行深化學習時，大部分小朋友仍然無法在第一次就拼對旋轉建築物的 8 個方位，看來，空間概念的養成是無法速成的，需要時間慢慢累積，未來有機會筆者會再繼續幫孩子們加強。

建議一：大部分學生對於一層樓高度大約平均 2.5 公尺～4 公尺的量感並不清楚，所以未來在進行”長度(公尺)”教學時，可適時引導，如果可以實際操作測量，成效應該會更好。

建議二：有機會時可以向教科書的編輯群提出建議，希望他們在教科書中多穿插一些立體空間的問題，讓學生在學習過程有更多機會接觸此類問題。

建議三：坊間有些智力測驗的試題中，有蠻多探討空間概念之類的題目，有機會也可以收集並提供給學生們練習。

小三的挑战——數學 PISA 試題評量

高雄市鳳山區中正國小 王珀芬

壹、前言

PISA (the Programme for International Student Assessment) 是一項強調基礎素養與終身學習能力的國際性標準化評量，由 OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) 於 1997 年起籌劃，2000 年開始實施，每三年舉辦一次，截至 2009 年為止，有超過 68 個 OECD 會員國與夥伴國 (地區) 參與計劃。臺灣在教育部與國科會統籌規劃，並交由臺南大學承辦之下，臺灣學生於 2006 年開始參與 PISA 國際學生能力評量。PISA 的評量對象為 15 歲學生，目的是評量學生在數學、科學和閱讀方面的素養、能力及面對成人生活的準備度。而臺灣學生在 2006 及 2009 年二次數學表現都相當優異，但名次卻略退步，此評量結果已引起數學教育界廣泛的關注 (洪雪芬, 2011; OCED, 2011)。

在參加數學領航教師研習之前即已閱讀過 PISA 相關的報導，但在參加研習之後，正式的認識 PISA 與傳統評量的不同，想了解在傳統的教室中，三年級的學生對於此類開放式試題的反應，因此嘗試從 PISA 試題樣本中選取適合國小中年級學生的試題進行評量活動。除了了解學生的作答反應外，也期待從中發現學生學習的困難點，以提供教學參考。

貳、評量目標

- 一、了解學生解決 PISA 評量開放性問題的解題表現。
- 二、了解每個學生在「骰子」問題與「形狀」問題中，其數學解題與說理的能力。
- 三、了解全班學生在「骰子」問題與「形狀」問題中，正確解題與錯誤解題之解題類型。

參、評量內容及標準

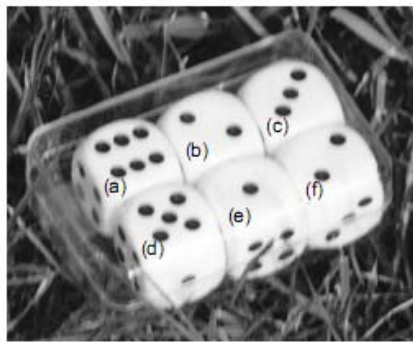
本研究評量內容有二題，涵蓋幾何、數量二個主題。第一題題目特色：內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，評量重點是處理複雜資訊的能力，屬於數量題材。第二題題目特色：內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的，評量重點是說理的能力，屬於幾何題材。以下就其內容及評量標準加以說明。

一、評量內容

本評量之第一題，題目屬於填充題，含一個問題，原題目只要求在空格中寫(或畫)出答案，為了能確實掌握學生解題思維，在第一題之後加入「請寫出你的想法」之要求。題目內容如下：

【第一題】骰子

問題1：在這張相片中你可以看見六個骰子，分別被標記(a)到(f)。所有骰子都有個規則：每兩個相對的面之點數和都是七。

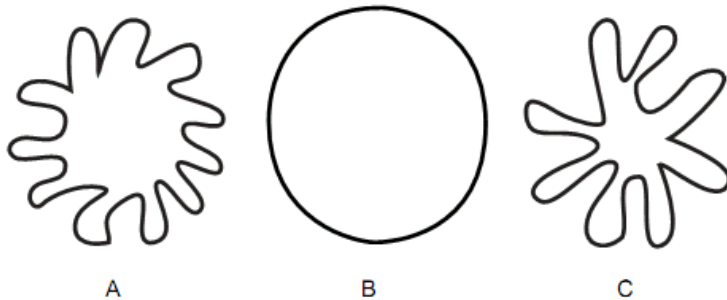


寫下照片中盒子裡的每個骰子底部的點數為何。

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

◎請寫出你的想法。

【第二題】形狀



問題 1：上面哪個圖形的面積最大？請寫出你的理由。

問題 2：寫出一個估算圖 C 面積的方法。

問題 3：寫出一個估算圖 C 周長的方法。

二、評量標準

本研究以 PISA 評量所提供的評分標準來評分，以掌握學生的數學數養表現，說明如後表 1 及表 2 所示。

表1 第一題「骰子」之PISA 評量標準

評量標準
代號1：上列(1 5 4) 下列 (2 6 5)。以骰子點數圖案表示的答案是可以接受的。
代號0：其他答案
代號9：沒有作答

表2 第二題「形狀」之PISA 評量標準

評量標準
代號 1：B 圖，並說明合理的理由 <ul style="list-style-type: none">• 它的面積最大，因為其它的圖可以放到它的裡面
代號8：B圖，沒有合理說明。
代號0：其他答案
代號9：沒有作答

肆、實施年級

本示例實施年級與對象為高雄市某國小三年級 28 位學生。而本研究的題材(骰子問題、形狀問題)原本是 PISA 針對全球 15 歲學生所設計的題目，但因為本研究實施對象為國小三年級學生，部分幾何上的名詞並未學習，因此，研究者在施測前，口頭解釋相關的幾何名詞包含相對的面、面積及周長，待學生了解後逕行施測。

伍、實施流程

本次評量涵蓋二類題型，二個題目，第一題題目內容敘述清楚，但「相對的面」一詞對於學生是陌生的，因此教師在說明後再加以施測；第二題題目內容敘述明確，但解題要求是學生不太熟悉的，部分名詞也是陌生的，因此教師先做名詞說明，再讓學生自行閱讀題目及解題。實施流程如下：

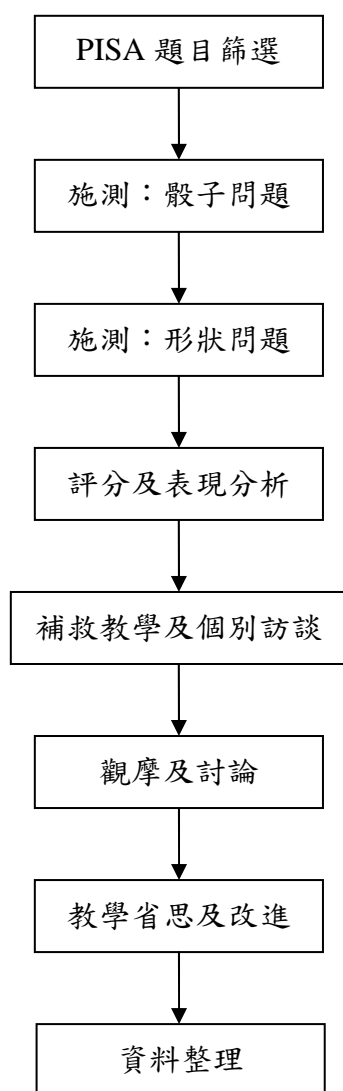


圖1 實施流程圖

陸、學生之解題表現分析

筆者以 PISA 試題樣本中的骰子問題與形狀問題作施測，以紙筆評量方式，請學生將問題做法及想法寫在紙上。以下就國小三年級學生在骰子問題與形狀問題二題目之解題表現分析。

一、「骰子」問題之解題表現分析

問題一：「骰子」問題的解題表現分析如表 3 所示：

表3 骰子問題的評量表現

題號	代號1 (滿分)		代號0 (零分)		代號9 (沒作答)	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
問題1	15 人	53.57%	11 人	39.29%	2 人	7.14%

「骰子」問題之整體評量表現為滿分 53.57%，零分 39.29%。本題為數量題材，內容敘述清楚，解題要求是學生熟悉的，不過，只有大約一半的學生達到 PISA 的要求水準。

二、「形狀」問題之解題表現分析

問題二：「形狀」問題的解題表現分析如表 4 所示：

表4 形狀問題的評量表現

題號	代號1 (滿分)		代號8 (不完整)		代號0 (零分)		代號9 (沒作答)	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
問題1	8 人	28.57%	13 人	46.43%	6 人	21.43%	1 人	3.57%
問題2	0 人	0.00%	2 人	7.14%	15 人	53.57%	11 人	39.29%
問題3	1 人	3.57%	0 人	0.00%	17 人	60.71%	10 人	35.71%

「形狀」問題 1 之整體評量表現為滿分 28.57%，部分得分 46.43%，零分 21.43%。本題為幾何題材，內容敘述複雜，解題要求是學生不太熟悉的，因此，在問題 1 只有 28.57% 的學生達到 PISA 的要求水準。滿分和部分得分學生數雖然已達 75%，但在接下來的二個題目雖然都經過題目說明及導讀，不過答對率都非常的低。

綜上學生表現，第一題雖是數量問題，但其中包含的幾何概念卻干擾學生答題，使教師反省對於幾何的教學，似乎需要對學生名詞的掌握再次的了解，在研究外與同儕對話時也發現，部分教師也會因認為是容易的教材而顯得沒有如數量問題引導的仔細，也令人思考，是否在數學教學現場，有重數量而輕幾何的問題。此外，第二題形狀問題，大部分學生能了解並選出正確圖形，但無法明確的說出原因，顯示學生的說理能力，也需要再加強。而在形狀問題第二題和第三題學生非常的不熟悉答得並不好，然而學生的答題也顯示，有約三分之一的學生，沒有嘗試的勇氣。

柒、補救教學與深化學習

一、「骰子」問題

(一) 首先利用教具骰子實際展示說明。

具體操作對於三年級學生還有一定的入要性，因此以教具骰子具體呈現，再加以說明以協助學生理解。

(二) 以個別訪談方式，進行一對一補救教學

找出錯誤型態，以個別晤談的方式，一一進行補救教學，舉例如下：

表5 「骰子」問題補救教學舉例

學生	解題類型	以個別訪談方式進行補救教學						
S17	完全不理解題意(照抄) <table border="1" data-bbox="347 920 659 1025"> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table>	6	2	3	5	1	2	T: 你是怎麼算出來的 S: 我照上面寫的 T: 我們再來看一次題目，他說了什麼？ S: (念一次題目)，他要寫底部的點數 T: (指教具)所以不是看到這裡對不對？ S: 是。 T: 什麼是相對面？ S: (指教具相對的面) T: 所以他問的是這裡對不對？ S: 嗯! 所以要寫(.....正確答案)嗎?
6	2	3						
5	1	2						
S04	部分答對(看錯面) <table border="1" data-bbox="347 1413 659 1518"> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> </table>	1	5	5	6	3	4	T: 你是怎麼算出來的 S: 上面和下面是7 T: (指C) 那這裡是..... S: 8, 算錯了，我再算一下 T: 這面(D)到底是5還是1 S: 不是1嗎? T: (指教具)1是這裡，這裡是5才對 S:
1	5	5						
6	3	4						
S12	計算錯誤 <table border="1" data-bbox="347 1805 659 1910"> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>4</td> </tr> </table>	1	5	4	2	6	4	T: 你是怎麼算出來的 S: 上面和下面是7 T: (指F)這裡呢? S: 算錯了
1	5	4						
2	6	4						

(三) 透過同儕觀摩討論方式，進行深化學習。

展示優秀作品，相互觀摩，探討如何將自己所知道的數學概念和解題策略，透過圖形、算式或文字正確的表達出來。舉例如下：

表6 「骰子」同儕觀摩舉例

學生	解題						
S14	<p>答案正確說明清楚</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>5</td> </tr> </table> <p>骰子左右的數不用算， 算下面的數字就好了。 (骰子左右的數不用算，算下面的數字就好了。)</p>	1	5	4	2	6	5
1	5	4					
2	6	5					
S02	<p>題目說每個骰子相對的面加起來是七。 (題目說：每個骰子相對的面加起來是7。)</p>						
S26	<p>相對面的上面$\frac{1}{2}$下面 (相對面的上面減下面。)</p>						

二、「形狀」問題

(一)再次說明面積和周長的意思。

再次說明周長及面積的意思，並利用繩子說明周長的計算方式，以及教具平方公分板說明面積的計算方式。

(二) 透過同儕觀摩討論方式，進行深化學習。

問題2和問題3因答對率太低，無法進行個別訪談及一對一補救教學，因此利用同儕作品觀摩及討論方式補救教學同時進行深化學習。

表7 「形狀」問題1同儕觀摩舉例

學生	解題類型	觀摩討論
S02	<p>答是B 因為B全都補滿了。 只有其它的圖形沒補滿。 (B，因為B全部都補滿了，其它的圖形沒有補滿。)</p>	<p>T: 這幾個小朋友都說B大，為什麼？ S02等生說明:..... T: 所以把B放在A或C上可以全部蓋住？ S: 嗯！所以B最大。</p>

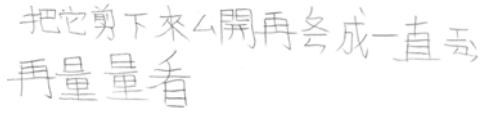
S19	B最大,因為別的都有彎下去。 (B最大,因為別的都有彎下去)	
S22	因為圓形比其他的大他沒有空位所以 圓形比較大 答B (B大,因為圓形比其他的大,他沒有空位,所以圓形比較大)	
S26	B最大,因為B是圓形A和C都有缺口。 (B最大,因為B是圓形,A和C都有缺口)	

表8 「形狀」問題2同儕觀摩舉例

學生	解題類型	觀摩討論
S09	把圓形和C的形狀重疊。 (把圓形和C的形狀重疊)	T: 為什麼重疊就可以量出來? S09: 可以知道誰比較大 T: 可是這裡要你”寫出一個估算圖C面積的方法。”這樣可以估算出來嗎? S14: 不行 T: 所以呢? S:..... T: 先拿平方公分板..... S25: 放在上面算 T: 如果沒有板子呢? S15: 可以用畫的。

表9 「形狀」問題3同儕觀摩舉例

學生	解題類型	觀摩討論
S21	用一隻螞蟻在上面走足各算出來。 (捉一隻螞蟻,讓他在上面走一圈,就可以算出來了。)	T: 你是怎麼算出來的 S21: 螞蟻走完就知道了 T: 我們要怎麼計算螞蟻走了多遠呢? S27: 所以要把螞蟻走過的地方量一量。 S12: 給它一條線

S15	 (把它剪下來撕開，再拼成一直線，再量量看。)	S: 慢慢的拼就可以拼成一直線了 T: 嗯!好像有一點辛苦。要很有耐心!
-----	---	---

捌、省思與建議

一、省思

(一) 學生的說理能力

三年級學生的說理能力仍然不足，可能年級尚低表達能力不好，或許在低年級教學時訓練也不足，目前的教學活動教師說明的時間仍佔教學時間的大部分，因此學生「說」的練習是不足的，不但無法說理，甚至連說的勇氣都沒有。此外，有許多學生顯然對於學習沒有反思的能力，因此無法說出自己解題的過程。

(二) 學生的答題能力

學生面對非典型的試題時，會不知所措，且不會試著解題，更有一大部分的學生會直接放棄。在數學學習常會提到經驗察覺理解的過程，但孩子似乎對於新的題目，不會去整合舊經驗找出答題的方式，甚至已再三提醒沒有固定的方法，孩子卻連天馬行空的想出一個自己的答案都沒有嘗試的勇氣。顯示孩子在學習仍然是被動的，被規範的，**沒有自行解題的想法**。

(三) 題目的篩選問題

本次施測題目篩選是以研習所提供的適合年級為基礎，選出適合2-4年級的題目，並沒有再一次過濾。但施測後即發現，部分題目看似簡單，但其中包含了較高年級的概念。如骰子問題適用年級為二年級，但題目中「規則」、「相對的面」、「和」對於二年級的孩子是無法理解的名詞，學生無法順利答題，造成學生的挫折感，因此在施測前題目選用應再嚴謹一些。

二、建議

(一) 主動接觸、了解及運用 PISA 評量試題

對於國內教師，PISA評量試題是一個新的評量方式，研究者在接接觸之初即認為是一種有趣的試題，但若真要運用則認為會很困難，因為其中開放性的問題，及與傳統不同的試題敘述方式對於孩子都是陌生的。在研習時仔細的看過輔導團的試題分析後，又覺得似乎可行，然而這一切都是想像。在真正實施時發現其中還有許多要注意的細節，但總體而言，本次嘗試發現，孩子並不如預期的害怕，而且在引導之下對於自己也漸有信心。因此教

師宜主動接觸了解PISA 評量試題，適時由淺而深的運用於教學中，了解學生的迷思，並協助學生習慣開放式的問題。

(二) 調整教學方式

除了「聽」外，學生「說」的能力應再加強，必須練習系統化的陳述，且能用精確的數學語言來說明，才能讓學生言之有物，不會老是說不到重點。再者，教師應在教學時應給多學生嘗試的機會，並提供有安全感的環境，讓學生能勇於嘗試勇於表達。此外，教師應加強學生後設思考能力的訓練，使學生對於自己學習狀況更能掌握。

(三) 利用同儕學習

學生之間的同儕學習往往因彼此的認知差距較小，而有明顯的效果。在本研究中也顯示，看了同學的作品後，學生會從同學成功或失敗的經驗中反思且學習，而且可以增加學生之間的合作，得到愉快的經驗。而被當做優秀作品展示的孩子，因為被公開的肯定，成就感被大大滿足，對於自己的自信也大增，更成為同學們崇拜的對象，其他的孩子也會起而效尤。因此同儕學習對於孩子學習尤其是開放式的問題，值得推展。

參考文獻

洪雪芬(2011)。運用 PISA 評量試題於國小六年級之數學解題初探。2011 年南臺灣教育論壇。(論文集 P209-243)

樣本試題PISA。2011 年 9 月 2 日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。

What PISA Is?. Retrieved October 13, 2011, from http://www.pisa.oecd.org/pages/0,3417,en_32252351_32235907_1_1_1_1_1,00.html

中間鏤空立體圖的結構與體積

高雄市國小數學輔導團/博愛國民小學 洪雪芬

一、實施對象：六年級（普通班學生）

二、學習難點

關於「中間鏤空立體圖的結構與體積」這一個主題，透過 PISA 樣本試題，針對六年級普通班 31 位學生施測結果，有 4 位學生雖然答案正確，但卻無法正確繪製 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖；更有 4 位學生由於無法正確繪製 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖，以致完全無法解題；可見立體圖之繪製，對於部分國小六年級學生而言是困難的。從學生的解題分析歸納學習困難主要分為三類：

「中間鏤空立體圖」的學習困難	
1	無法正確繪製立體圖。
2	無法掌握「中間鏤空立體圖」的結構。
3	無法掌握「先算全部體積，再挖掉空心部份體積」的解題策略。

三、教學目標

主 題	<input type="checkbox"/> 數與計算 <input checked="" type="checkbox"/> 量與實測 <input checked="" type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
分年細目 (97)	6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
教學目標	1. 能正確繪製立體圖，並掌握「中間鏤空立體圖」的結構。 2. 能掌握「中間鏤空立體圖」體積計算的解題策略。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

國民教育階段特殊教育課程綱要總綱指出進行補救教學可採「簡化」、「減量」、「分解」、「替代」及「重整」的方式來調整教學內容。說明如下：「簡化」指降低能力指標的難度。「減量」為減少能力指標的部分內容。「分解」代表將能力指標分解為幾個小目標，在不同的階段或同一個階段分開學習。「替代」代表原來指標適用，但須以另一種方式達成，如原為「寫出」改為「說出」。「重整」則係將該階段或跨階段之能力指標重新詮釋或轉化成生活化或具體化的目標。

針對「中間鏤空立體圖的結構與體積」的學習困難，補救教學內容處理如下：

策略	內容說明
簡化	/
減量	/
分解	<ul style="list-style-type: none"> ● 將欲達成之目標分解為幾個小目標，分開學習，例如： 第一階段：完成簡易題目 $3 \times 3 \times 3 - 1 \times 1 \times 1$、$4 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2$ 的解題。 第二階段：完成原題目 $6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2$ 的解題。 第三階段：完成總結評量題目 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3$，$7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3$ 的解題。
替代	1. 以數位素材替代紙本上的圖示，引導其理解題意、掌握題意。 2. 以同儕畫的正確圖示替代學生自己畫的圖示，引導其掌握題意。
重整	/

五、教學規劃與實施

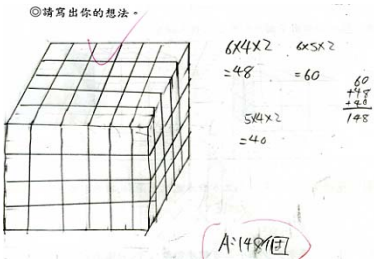
(一) 設計理念

補救教學著重及時和適性，因此，筆者的補救教學規劃與實施主要分為兩個階段，首先針對個別學生之解題迷思進行分析，其次，採用「分解」、「替代」方式調整補救教學內容，最後以個別訪談方式適度提供各種線索及提示來進行補救教學。

(二) 教學活動

由於學生 A10、A14 和 A30 的迷思概念相當具有代表性，因此，以此三位學生的補救教學為例，說明如下：

1. 學生 A10 之補救教學：教師以個別訪談方式，適度提供各種線索及提示來進行補救教學：(1) 透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何。(2) 透過問話協助學生思考如何解題。(3) 協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

主要問題與活動	評量重點及說明
<p>● 透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何。</p> <p>T: (指著學生的解答) 請說說看，你是怎麼算出來的?</p> 	<p>● 學生能理解自己的迷思概念為算出六面的立方體數量，但是沒有將重複部分扣掉。</p>

S:先算出每一個面的立方體數量，再加起來。

T:你的答案是錯的，想想看，錯在哪裡？

S: (想了一會兒)有重疊，沒有扣掉。

T:那麼，要扣掉多少？

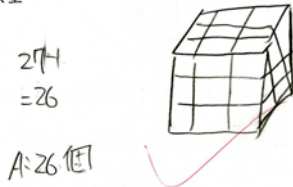
S: 4×4 ， 6×4 ， 5×4 ，(想了一會兒)，好複雜，算不出來。

T:那麼，可以用別的方法算算看。

●透過問話協助學生思考如何解題。

T: (指著前一題的解答)說說看，你是怎麼算出來的？

問題3：蘇珊想到可以用比實際還要少的小立方體來作出圖C的積木模型。她想用膠水黏出一個看起來像圖C，但是內部是中空的積木模型。問蘇珊需要多少個小立方體來做出這個看起來像圖C，但是內部卻是中空的積木模型。



S:先算出 $3 \times 3 \times 3 = 27$ ，再扣掉空心部分一個。

T: 那麼，你知道問題4，可以怎麼算了嗎？

S:可以先算全部，再挖掉空心的部份。

$$6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 = 120 - 24 = 96$$

●協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

T:空心部分是怎麼算出來的？

S: $6 - 2 = 4$ ， $5 - 2 = 3$ ， $4 - 2 = 2$ ， $4 \times 3 \times 2 = 24$ ，就是空心的部份。

●學生能以自己的能力提出解題策略。

●學生能清楚說出自己的解題策略。

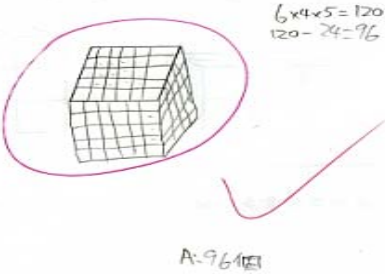
2. 學生 A14 之補救教學

教師以個別訪談方式進行補救教學：(1) 透過問話掌握學生之迷思概念，並引出學生之認知衝突。(2) 透過數位素材的展示，協助學生理解題意，並解題。(3) 協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

主要問題與活動	說明及評量重點
---------	---------

● 透過問話掌握學生迷思概念，並引出學生之認知衝突。

T: (指著學生的解答) 你是怎麼算出來的?



S: 在圖上方塗 12 格和側面塗 12 格

$12 + 12 = 24$ ，挖掉 24 個。

T: (指著圖形) 可是，你的圖多畫一層了。

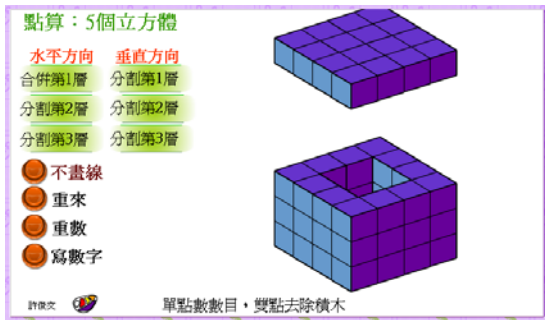
S: (先從底部擦掉一層，然後在圖上方塗 12 格和側面塗 8 格) 那要改成 $12 + 8 = 20$ 。

T: 可是，這樣改，答案就錯了。

S:

● 透過數位素材的展示，協助學生理解題意。

T: (教師秀出下圖引導學生理解題意) 請看這個圖要挖掉多少個小立方體?



S: 要挖掉 $4 + 4$ 。

T: $4 + 4$ 指的是什麼?

S: 指的是中間要挖掉的部分。

T: 回到原來的題目，你知道要挖掉多少個小立方體嗎?

S: 知道，要挖掉 $12 + 12$ ，兩層。

● 教師需先知道學的問題在哪裡，才能找出適當的補救教學策略，教師透過問話掌握學生之迷思概念。

● 學生能清楚掌握題意。

● 學生能掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。

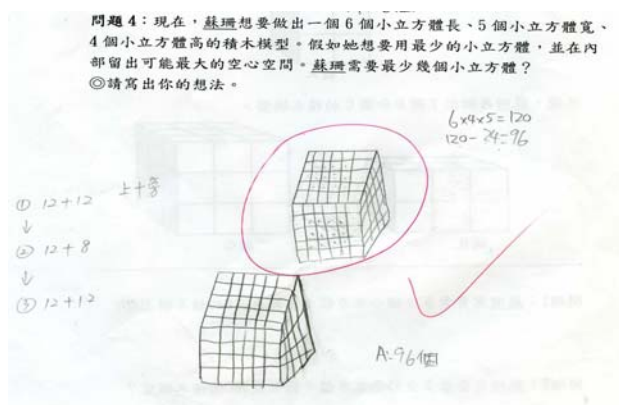
●協助學生清楚說出自己的解題策略，發展後設認知能力。

T:空心部分是怎麼算出來的?

S:一層是 $4 \times 3 \times 2 = 12$ ， $12 + 12 = 24$ 。

T:很好，現在你要怎麼修改一下你的答案。

S:改圖就好，答案還是 24，不用改。修改如下：

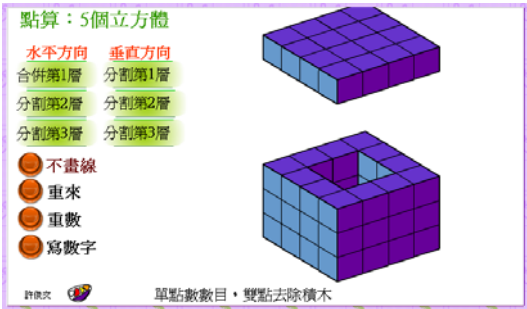


註:上圖左邊的小字是教師忍不住記下的學生解題歷程:從 $12 + 12$ (錯誤)到 $12 + 8$ (錯誤)到 $12 + 12$ (正確)。

●學生能清楚說出自己的解題策略。

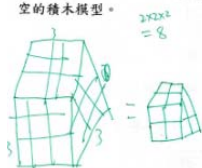
3. 學生 A30 之補救教學

教師以個別訪談方式進行補救教學:(1) 透過數位素材和圖示，協助學生掌握「中間鏤空立體圖」的結構，並解題。(2) 協助學生繪製立體圖，發展空間概念及能力。

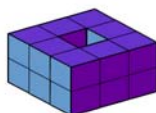
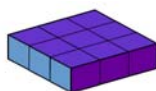
主要問題與活動	說明及評量重點
<p>●透過數位素材和圖示，協助學生掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。</p> <p>T:(教師秀出下圖引導學生理解題意)請看這個圖要挖掉多少個小立方體?</p>  <p>S:要挖掉 $4 + 4 = 8$。</p> <p>T:這個圖總共有幾個小立方體，請算算看。</p> <p>S:$4 \times 4 \times 4 = 64$，$4 + 4 = 8$，$64 - 8 = 56$。</p>	<p>●學生能掌握「中間鏤空立體圖」的結構與體積計算策略。</p>

T: (教師秀出下圖引導學生理解題意) 回到問題3, 你知道要挖掉多少個小立方體嗎?

問題3: 蘇珊想到可以用比實際還要少的小立方體來作出圖C的積木模型。她想用膠水黏出一個看起來像圖C, 但是內部是中空的積木模型。問蘇珊需要多少個小立方體來做出這個看起來像圖C, 但是內部卻是中空的積木模型。

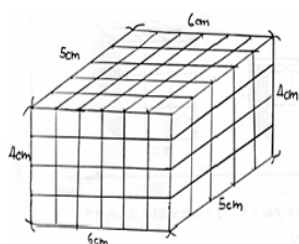


A: 8個積木



S: 要挖掉一個, $3 \times 3 \times 3 = 27$, $27 - 1 = 26$ 。

T: (秀出同學畫的很清晰的圖), 你知道題目的意思嗎?



S: 知道, 圖形的長寬高是6、5、4, 中間是空心的。

T: 空心的部分有幾層?

S: 有兩層, $4 \times 3 \times 2 = 24$ 。修正如下:

$$6 - 2 = 4, 5 - 2 = 3, 4 - 2 = 2$$

$$6 \times 5 \times 4 - 4 \times 3 \times 2 = 120 - 24 = 96。$$

● 協助學生繪製立體圖。

T: 你的圖畫得很好(中圖), 誰教妳的。

S: 我不會畫, 請同學幫我畫的。

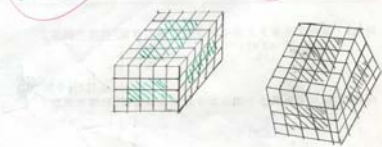
T: 你也學著畫畫看吧。

S: 好的(結果畫得很好)(右圖)

T: 你的學習態度真好, 進步真多!

問題4: 現在, 蘇珊想要做出一個6個小立方體長、5個小立方體寬、4個小立方體高的積木模型。假如她想要用最少的小立方體, 並在內部留出可能最大的空心空間。蘇珊需要最少幾個小立方體?
◎請寫出你的想法。

Handwritten calculations for Problem 4:
 $6 \times 5 \times 4 = 120$
 $120 - 24 = 96$
 $6 \times 5 \times 4 = 120$
 $120 - 24 = 96$
 A: 96個小立方體



● 學生能繪製立體圖。

六、學生表現與教學省思

(一) 學生表現

學生 A10、A14、A30 針對總結評量內涵為 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3$ 及 $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3$ 之題目，均能正確解題，可見三位學生經過補救教學之後，已能完全掌握此題型之解題策略。學生表現如下：

編號	學生解題
A10	(1) $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) $7 - 2 = 5$ ， $6 - 2 = 4$ ， $5 - 2 = 3$ ， $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$
A14	(1) 先畫圖，看出一層要挖掉 3×3 ，總共要挖掉 3 層。 $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) 先畫圖，看出一層要挖掉 5×4 ，總共要挖掉 3 層。 $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$
A30	(1) 先畫圖，再寫算式。 $5 - 2 = 3$ ， $5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$ (2) 先畫圖，再寫算式。 $7 - 2 = 5$ ， $6 - 2 = 4$ ， $5 - 2 = 3$ $7 \times 6 \times 5 - 5 \times 4 \times 3 = 210 - 60 = 150$

(二) 教學省思

關於「中間鏤空立體圖」的學習，學生的學習困難有層次之差異，分別為無法掌握「先算全部，再挖掉空心部份」之解題策略、無法掌握「中間鏤空立體圖」的結構和無法正確繪製立體圖。教師針對學生的學習困難點，透過個別對話及補救教學之後，學生的迷思概念澄清了，能力也有所提升。

1. 學生能掌握「先算全部，再挖掉空心部份」之解題策略

A10 原來採用「先算出每一個面的立方體數量，再加起來。」之解題策略，此策略還需扣掉重複部分，對學生來說是困難的，於是引導學生先觀察自己在問題 3 所使用的解題策略，也就是引導重新省思自己的解題思維，將舊經驗運用到新情境，進而嘗試進行問題 4 之解題。最後學生以「先算全部，再挖掉空心部份。」之解題策略，替代原

來「先算出每一個面的立方體數量，再加起來。」解題策略，完成解題。從學生 A10 最後的評量表現，沒有畫圖，直接解題，可見其已能完全掌握此題型之解題策略。

2. 學生能掌握「中間鏤空立體圖」的結構

教師需先知道學生的問題在哪裡，才能找出適當的補救教學策略。首先，教師透過問話掌握學生 A14 之迷思概念；其次，透過數位素材展示較簡易的題目，內容為 $4 \times 4 \times 4$ 立體圖，挖掉 $2 \times 2 \times 2$ ，協助學生理解題意，掌握「中間鏤空之立體圖形」的結構；最後，引導學生清楚說出自己的解題策略。學生 A14 帶給我的最大省思是教師在批改學生作業時，宜注意其解題記錄，不要只看答案；若有疑問，可以透過問話進一步了解學生的解題思維，以便及早發現學生的迷思概念，予以導正。以學生 A14 為例，答案是對的，但是圖是錯的，還好有透過問話進一步了解學生的解題思維，否則就無法發現學生 A14 的迷思概念了。

3. 學生能正確繪製立體圖

學生 A30 因為無法正確繪製立體圖，以致無法正確解題；首先透過數位素材展示較簡易的題目，內容為 $4 \times 4 \times 4$ 立體圖，挖掉 $2 \times 2 \times 2$ ，協助學生理解題意，以掌握「中間鏤空立體圖」的結構；其次，透過數位素材展示，協助學生修正問題 3 的錯誤解題；由於高雄市博愛國小許俊文老師設計的「切一切」數位素材最大只能畫出 $4 \times 4 \times 4$ 的立體圖，因此，在處理問題 4 時，秀出同學畫的 $6 \times 5 \times 4$ 的立體圖，協助學生 A30 解題。最令人欣喜的是，學生 A30 在同學的協助下，學會了繪製立體圖，當然也能順利解題了。

本文以「中間鏤空立體圖」為例，針對學習困難提出的補救教學策略包含：透過問話掌握學生之迷思概念，並引出學生之認知衝突；透過問話協助學生理解自己的迷思概念為何；透過數位素材的展示，協助學生理解題意；透過同儕協助，引導學生學習繪製立體圖；透過對話引導學生清楚說出自己的解題策略等。總之，正因為學生的學習困難有層次之差異，所以教師在實施補救教學時，宜注重個別化教學，也就是要有針對性，要聚焦於學生的困難。如此，補救教學才能事半功倍。

七、學習資源參考資料

洪雪芬(2011)。運用PISA評量試題於國小六年級之數學解題初探。2011年南臺灣教育論壇。

樣本試題PISA。2011年1月2日，取自：<http://pisa.nutn.edu.tw/>。

國民教育階段特殊教育課程綱要總綱。2011年10月1日，取自：

http://www.ntnu.edu.tw/spc/drlusp_1/home.html。

許俊文數位素材設計。http://www.paps.kh.edu.tw/asp/math_menu/add_source_rec.aspx?rec=150

四年級整數四則問題探討

高雄市國小數學輔導團/博愛國民小學 李書欣

一、緣起：這是一題曾經在新聞媒體轟動一時的數學題目「 $6 \div 2(1+2) = ?$ 」，看似簡單的數學問題，卻考倒了超過百萬名網友，真的有這麼難嗎？若將這個問題省略的乘號補上，題目寫成 $6 \div 2 \times (1+2) = ?$ ，在國小課程編排中，這是一題屬於整數四則的問題。在教學上，整數四則的通則有以下三點：1. 一般而言，由左而右算，2. 先 \times 後 $+$ （先乘除後加減），3. 有(括號)先算。若是學生只記得這些通則，而沒有真正理解其內涵，就會導致解題上的誤解，得到 $6 \div 2 \times (1+2) = 1$ 的錯誤結果。因此，瞭解國小學童對整數四則的錯誤概念，以利老師進行補救教學。

二、實施對象：四年級學生 30 人

三、研究工具：教師自編整數四則問題

四、國小四年級整數四則教學目標

主 題	■數與量 □幾何 □代數 □統計與機率 □連結
分年細目	4-n-03 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式記法（包括連乘、連除、乘除混合）。 4-n-04 能作整數四則混合計算(兩步驟)。 4-n-01 能在具體情境中，理解乘法結合律、先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數的積。
教學目標	1. 解決生活情境中整數四則的兩步驟問題 2. 將生活情境中兩步驟的整數四則問題用併式記錄 3. 瞭解整數四則混合計算時，併式的約定 4. 理解連除的簡化計算

五、研究工具分析：

解題使用	問題類型	題數
減和除	兩步驟問題	三題
	三步驟問題	一題

六、學生錯誤類型分析

問題類型	題目描述	正確解題	錯誤情形	錯誤人數	總錯誤人數
兩步驟問題	筱玫有 400 元，買書花掉 265 元，剩下的錢剛好可以買 9 本筆記本，請問一本筆記本是 多少元？	$(400-265)\div 9$ $=135\div 9=15$	1.沒寫括號 $400-265\div 9$	2 人	7 人
			2.計算錯誤 $400-165$ $=145$ $145\div 9=16\cdots 1$	1 人	
			3.列式錯誤		
			① $(400-265)-9=$ $135-9=126$	1 人	
			② $400-265$ $=135-90$	2 人	
			4.多寫等號	1 人	
兩步驟問題	一本字典 50 元，3 套益智玩具 1200 元，請問一本字典比一套益智玩具多 多少元？	$650-(1200\div 3)$ $=650-400$ $=250$	1.列式錯誤 $1200-650$ $=550$	1 人	6 人
			2.計算錯誤		
			① $650-(1200\div 3)$ $=650-400$ $=150$	1 人	
			② $650-(1200\div 3)$ $=650-40$ $=610$	2 人	
			3.概念不清		

			$\textcircled{1}1200 \times 3 - 650$ $= 3600 - 650$	1 人	
			4.等號	1 人	
兩步驟問題	3 個小蛋糕賣 225 元，5 塊慕司賣 450 元，1 塊慕司比 1 個小蛋糕多多少元？	$450 \div 5 - 225 \div 3$ $= 90 - 75$ $= 15$	1.列式錯誤且計算錯誤	1 人	8 人
			$225 \div 3 = 15$ $= 450 \div 5$ $= 90 - 15$ $= 75$		
			2.列式錯誤 $450 \div 5 + 225 \div 3$ $= 90 + 75$ $= 165$	1 人	
			3.計算錯誤 $450 \div 5 - 225 \div 3$ $= 90 - 73$ $= 17$	1 人	
			$450 \div 5 - 225 \div 3$ $= 90 - 75$ $= 25$	2 人	
			4.整題空白	1 人	
			5.完全不懂 $225 \div 450$	1 人	
			6.等號	1 人	
三步驟問題	喬安有 304 元，她和班上 4 位同學合買了一份 265 元的禮物送彩虹媽媽，請問付掉了禮物要平均分擔的錢之後，喬安還剩多少元？	$304 - 265 \div 5$ $= 304 - 53$ $= 251$	1.列式錯誤，題意不清		10 人
			(1)她和班上 4 位同學，是 5 人 $304 - 265 \div 4$ $= 304 - 66$ $= 238$	1 人	
			(2)只計算了買禮物每人需要花的錢 $265 \div (4+1)$ $= 265 \div 5$	2 人	

			=53		
			(3)拿喬安的錢分給四個人 $304 \div 4 = 76$	1人	
			(4) 計算喬安買禮物剩下的錢，將剩下的錢乘以四人 $304 - 265$ $= 39 \times 4$ $= 156$	1人	
			2.計算正確，答案抄錯	1人	
			3.題目數字抄錯	1人	
			4.計算錯誤	1人	
			5.整題空白	1人	
			6.等號	1人	

七、整數四則的補救教學策略： 簡化 減量 分解 替代 重整

進行補救教學可採「簡化」、「減量」、「分解」、「替代」及「重整」的方式來調整教學內容。說明如下：「簡化」指降低能力指標的難度。「減量」為減少能力指標的部分內容。「分解」代表將能力指標分解為幾個小目標，在不同的階段或同一個階段分開學習。「替代」代表原來指標適用，但須以另一種方式達成，如原為「寫出」改為「說出」。「重整」則係將該階段或跨階段之能力指標重新詮釋或轉化成生活化或功能化的目標。

◎舉例來說：

情境問題：小明的錢比小華多 80 元，小華的錢又比小欣多 250 元，如果小欣有 750 元，請問小明有多少元？

策略	內容說明
簡化	將問題改成數字較小的情境問題。

	<p>例：小明的錢比小華多 10 元， 小華的錢又比小欣多 5 元， 如果小欣有 50 元，請問小明有多少元？</p>
減量	<p>將題目<u>複雜度較少</u>的情境問題。 例：小華的錢比小欣的錢多 250 元， 如果小欣有 750 元，請問小華有多少錢？ 小明的錢比小華的錢多 80 元， 如果小華有 1000 元，請問小明有多少錢？</p>
分解	<p>將欲達成之目標<u>分解為幾個小目標</u>，分開學習。 第一階段：先完成題目「小華的錢又比小欣多 250 元」，所以小華的錢是 $750 + 250 = 1000$ 的解題。 第二階段：再完成題目「小明的錢比小華多 80 元」的解題，所以小明的錢是 $1000 + 80 = 1080$。 第三階段：合併兩式，$(750 + 250) + 80 = 1080$ 或 $750 + 250 + 80 = 1080$。</p>
替代	<p>用<u>畫圖</u>解決情境問題。</p> <p>小欣 </p> <p>小華 </p> <p>小明 </p>
重整	/

教師可使用「簡化」、「減量」、「分解」、「替代」的策略，來引導學生解決整數四則的相關問題。

八、學生學習困難與建議策略

1. 評量題目(一)：忻好的錢比筠烜多 80 元，筠烜的錢又比宇心多 250 元，如果宇心有 750 元，請問忻好有多少元？

○霖學生解題：

○霖的解題

忻好的錢比筠烜多 80 元，筠烜的錢又比宇心多 250 元，如果宇心有 750 元，請問忻好有多少元？

$$\begin{aligned} 750 - 250 + 80 \\ = 500 + 80 \\ = 580 \end{aligned}$$

A: 580元

學生解題分析：學生○霖解答此題，算式是錯誤的，進一步了解，發現學生瞭解「忻好的錢比筠烜多 80 元」，但對「筠烜的錢又比宇心多 250 元」卻解讀錯誤。

補救教學策略：1. 詢問學生「筠烜的錢又比宇心多 250 元」，是誰的錢比較多？
2. 請學生畫圖表示，讓學生發現筠烜的錢和宇心的錢的關係。

2. 評量題目(二)：喬安有 304 元，她和班上 4 位同學合買了一份 265 元的禮物送彩虹媽媽，請問付掉了禮物要平均分擔的錢之後，喬安還剩多少元？

周○秦學生解題：

周○秦的解題

喬安有 304 元，她和班上 4 位同學合買了一份 265 元的禮物送彩虹媽媽，請問付掉了禮物要平均分擔的錢之後，喬安還剩多少元？

$$\begin{aligned} 265 \div (4 + 1) \\ = 265 \div 5 \\ = 53 \end{aligned}$$

A=53元

學生解題分析：學生周○秦的算式中，解決了禮物 265 元，分攤給喬安和 4 位同學後，每人所要花的錢。而題目要問的是喬安原有 304 元，買了禮物後，剩下多少錢？推測學生未看完題意，就把認知上的題意寫下。

補救教學策略：請學生再念一次題目，確認學生是否了解「付掉了禮物要平均分擔的錢之後，喬安還剩多少元？」的含義。再問喬安原本有多少錢？買了禮物會剩下多少錢？

3. 評量題目(三)：

周○秦學生解題：

鄭○嚴的解題

喬安有 304 元，她和班上 4 位同學合買了一份 265 元的禮物送彩虹媽媽，請問付掉了禮物要平均分擔的錢之後，喬安還剩多少元？

$304 - 265 \div 4$
 $= 304 - 66$
 $= 238$

A: 238元

學生解題分析：學生鄭○嚴的算式中，可以知道 5 人合買禮物的錢只分攤給 4 人，而遺漏了喬安也需要分攤禮物的錢。

補救教學策略：請學生再念一次題目，確認學生是否了解「她和班上 4 位同學合買」是指 5 個人共同分攤禮物的錢。

4. 評量題目(四)：筱玫有 400 元，買書花掉 265 元，剩下的錢剛好可以買 9 本筆記本，請問一本筆記本是多少元？

○仁學生解題：

○仁的解題

筱玫有 400 元，買書花掉 265 元，剩下的錢剛好可以買 9 本筆記本，請問一本筆記本是多少元？

$(400 - 265) \div 9$
 $= 135 \div 9$
 $= 15$

A: 15元

學生解題分析：數學表徵錯誤，學生不懂得運用括號區分計算先後順序

補救教學策略：引導學生辨別 $(400 - 265) \div 9$ 和 $400 - 265 \div 9$ 的不同。

5. 評量題目(五)

蔡○安學生解題：

蔡○安的解題

<p>筱玫有 400 元，買書花掉 265 元，剩下的錢剛好可以買 9 本筆記本，請問一本筆記本是多少元？</p> $\begin{aligned} &= (400 - 265) \div 9 \\ &= 135 \div 9 \\ &= 15 \end{aligned}$ <p>A = 15 元</p>	<p>一本字典 650 元，3 套益智玩具 1200 元，請問一本字典比一套益智玩具多多少元？</p> $\begin{aligned} &= 650 - (1200 \div 3) \\ &= 650 - 400 \\ &= 150 \end{aligned}$ <p>A = 150 元</p>
<p>哥哥有 400 元，妹妹比哥哥少 265 元，今天媽媽再給妹妹 60 元，請問哥哥和妹妹兩人的錢合起來共有多少元？</p> $\begin{aligned} &= 400 + 60 \\ &= 460 - 265 \\ &= 400 + 135 \\ &= 535 \end{aligned}$ <p>A = 535 元</p>	<p>秉謙的錢比志帆少 65 元，志帆的錢又比稚緯少 78 元，如果稚緯有 235 元，請問秉謙有多少元？</p> $\begin{aligned} &= 235 - (78 + 65) \\ &= 235 - 143 \\ &= 92 \end{aligned}$ <p>A = 92 元</p>

學生解題分析：每題的列式前都多了一個等號，表示學生對等號的理解是「等號是得到答案的意義」。而在數學上，等號的意義應該是次序的大小關係。

補救教學策略：讓學生了解等號的意義。等號的意義有兩種，第一，等號是得到答案的意義，例如： $14 \div 3 = 4 \dots 2$ 。第二，等號是兩邊一樣大（一樣多）的意義，例如： $14 = 3 \times 4 + 2$ 。在本題中，學生應該要具有等號的第二種意義觀念，才能理解在列式前面不需要加等號。舉例來說，「 $2 + 4 = 6$ 」代表「2 和 4 經過加法運算後，得到的答案和 6 一樣大」。所以列式後的每個算式，大小皆等值，中間才需要加等號。

6. 評量題目(六)

陳○心學生解題：

<p>陳○心的解題</p>	
<p>3 個小蛋糕賣 285 元，5 塊慕司賣 450 元，1 塊慕司比 1 個小蛋糕多多少元？</p> $\begin{aligned} &450 \div 5 - 225 \div 3 \\ &= 90 - 75 \\ &= 25 \end{aligned}$ <p>A = 25 元</p>	

學生解題分析：學生計算出 $450 \div 5 = 90$ 和 $225 \div 3 = 75$ ，但之後的減法卻錯誤了。從 $90 - 75 = 25$ 中，瞭解學生十位數 9 未退位，因此 $90 - 70 = 20$ 。

補救教學策略：讓學生瞭解 90 退位給個位數後，減為 80，所以 $80 - 70 = 10$ 。

九、結論：

(一)整理學生錯誤類型，歸納整數四則運算四年級學生可能發生的錯誤類型有：

1. 加減乘除計算錯誤，加減退位錯誤
2. 不了解題意，錯用資訊與已知的條件，將題目數字胡亂拼湊
3. 看錯題目數值，計算時數字抄錯
4. 數學表徵錯誤，不懂得運用括號區分先後順序
5. 未能理解等號的意義

(二)可行策略：

1. 幫助學生了解題意與解題策略上，教師可使用「簡化」、「減量」、「分解」、「替代」的策略，來引導學生解決整數四則的相關問題。
2. 針對學生錯誤的情形，給予協助與適切的指導。

十、參考資料：

國民教育階段特殊教育課程綱要總綱。2011年10月1日，取自：

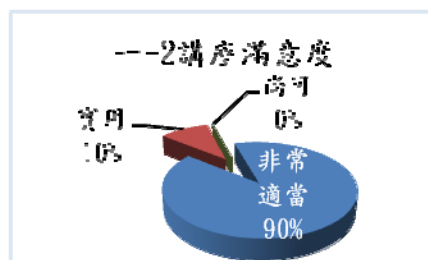
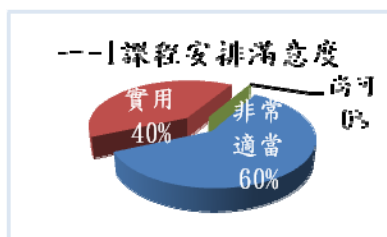
http://www.ntnu.edu.tw/spc/drlusp_1/home.html。

高雄市國教輔導團 100 年度精進教學計畫
 數學領域 領航教師 第五期第二階段
 精進數學教學與多元評量工作坊 回饋表統計

一、活動課程方面

非常滿意 滿意 尚可 不滿意 非常不滿意

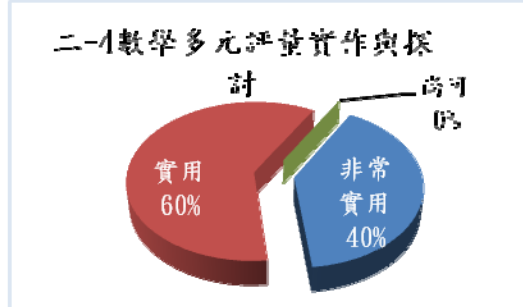
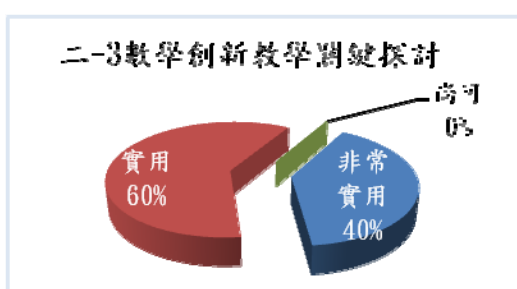
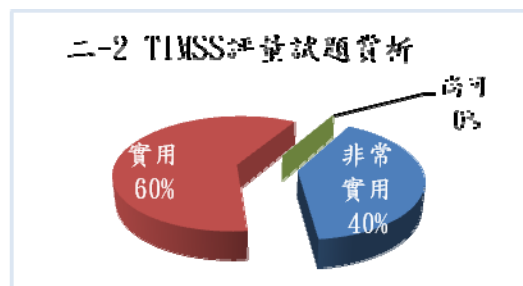
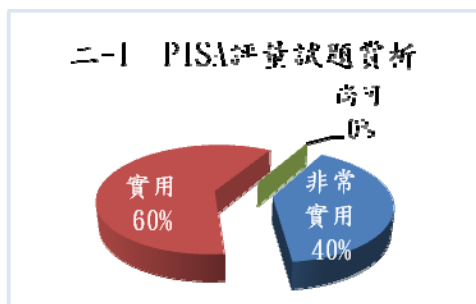
1、您對本研習課程安排之滿意程度	60%	40%	0%	0%	0%
2、您對主講者的整體表現滿意程度	90%	10%	0%	0%	0%



二、課程內容的實用程度

非常實用 實用 尚可 不實用 非常不實用

1、「PISA 評量試題賞析」	40%	60%	0%	0%	0%
2、「TIMSS 評量試題賞析」	40%	60%	0%	0%	0%
3、「數學創新教學關鍵探討」	40%	60%	0%	0%	0%
4、「數學多元評量實作與探討」	40%	60%	0%	0%	0%



三、研習心得及您的寶貴意見

◆ 瞭解 PISA 的出題方向是生活中可以用到的數學概念，上課時會引導學生思考，培養數學素養。

◆ 瞭解學生的迷思概念，對教學很有幫助！

◆ 瞭解國際的命題趨勢，期許自己能多自我充實，培養教學實力。

◆ 攜手計畫系統建置十分完善，希望能帶全班小朋友進去使用。

◆ 對於 PISA 和 TIMSS 評量有更深入的瞭解。

◆ 教學和評量都要能不斷精進，才能提升學生程度。

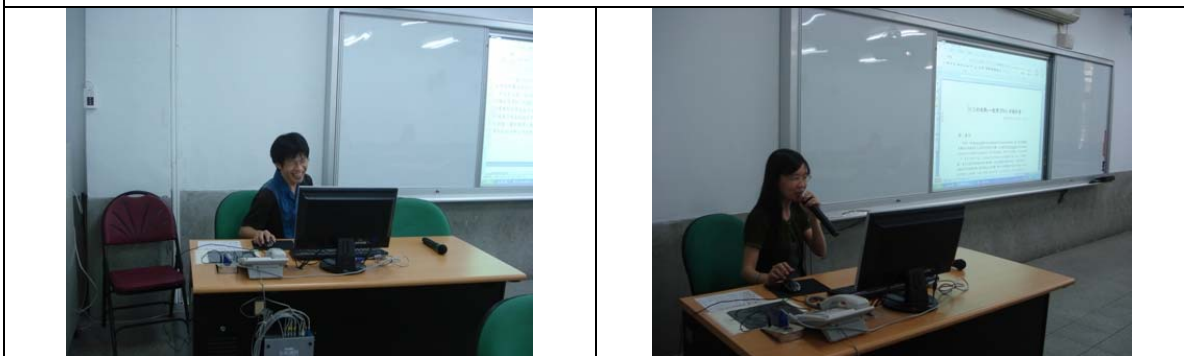
數學學習領域領航教師第五期第二階段
精進數學創新教學與多元評量工作坊研習花絮



林素微教授精彩演講



認真聽講、專注的神情



學員發表工作坊作業



學員發表工作坊作業