

倍數與大數初體驗～數學繪本之教學運用

高雄市國小輔導團 洪雪芬、陳幸永
 高雄市博愛國小 余淑娟、王淑華、康光輝教師

壹、教學活動設計

一、設計理念

「閱讀」在教育部的推動下，如今無論是都會型小學或偏鄉小學，均如火如荼的推動閱讀活動，當讀書聲洋溢在校園的每個角落，我們看見了教育的希望。本教學活動所選用的「螞蟻搬東西」數學繪本，是一本非常適合國小學生閱讀的數學普及讀物，繪本內容中螞蟻數量隨著故事情節從1隻、2隻、4隻、8隻、16隻慢慢遞增到512隻，非常精彩有趣。從繪本內容看來，作者所要傳達的數學意涵就是倍數與2的n次方的概念，然而，數量僅止於512，有點可惜；於是規劃《倍數與大數初體驗—數學繪本之教學運用》活動，引導學生將繪本內容的512隻螞蟻繼續倍增到2的29次方，以體驗大數，並針對2的倍數與大數進行體驗與探索。期望學生透過本活動的學習，能透過1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增活動，體驗倍數的變化，並能對億兆以上之大數來個初體驗，也期望學生能將閱讀的廣度從語文、歷史、自然科學拓展到數學普及讀物。

二、教學目標

- (一) 能閱讀「螞蟻搬東西」數學繪本，並掌握繪本內容之數學意涵。
- (二) 能將螞蟻數量每次加2與每次乘以2列表整理，並體驗兩者數量之差異。
- (三) 能編擬有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事，並探討故事的合理性。
- (四) 能透過本活動之學習，學會觀察、猜測、探索、發表與討論的能力。

三、教學資源

- (一) 數學繪本：魔數小子 25—螞蟻搬東西（倍數的秘密），出版社：遠流。



- (二) 網路資源：與棋士的故事，<http://zhidao.baidu.com/question/12087775.html>
- (三) 科普讀物：數學趣談—神秘訪客的故事。出版社：九章。

四、教學年級：四年級。

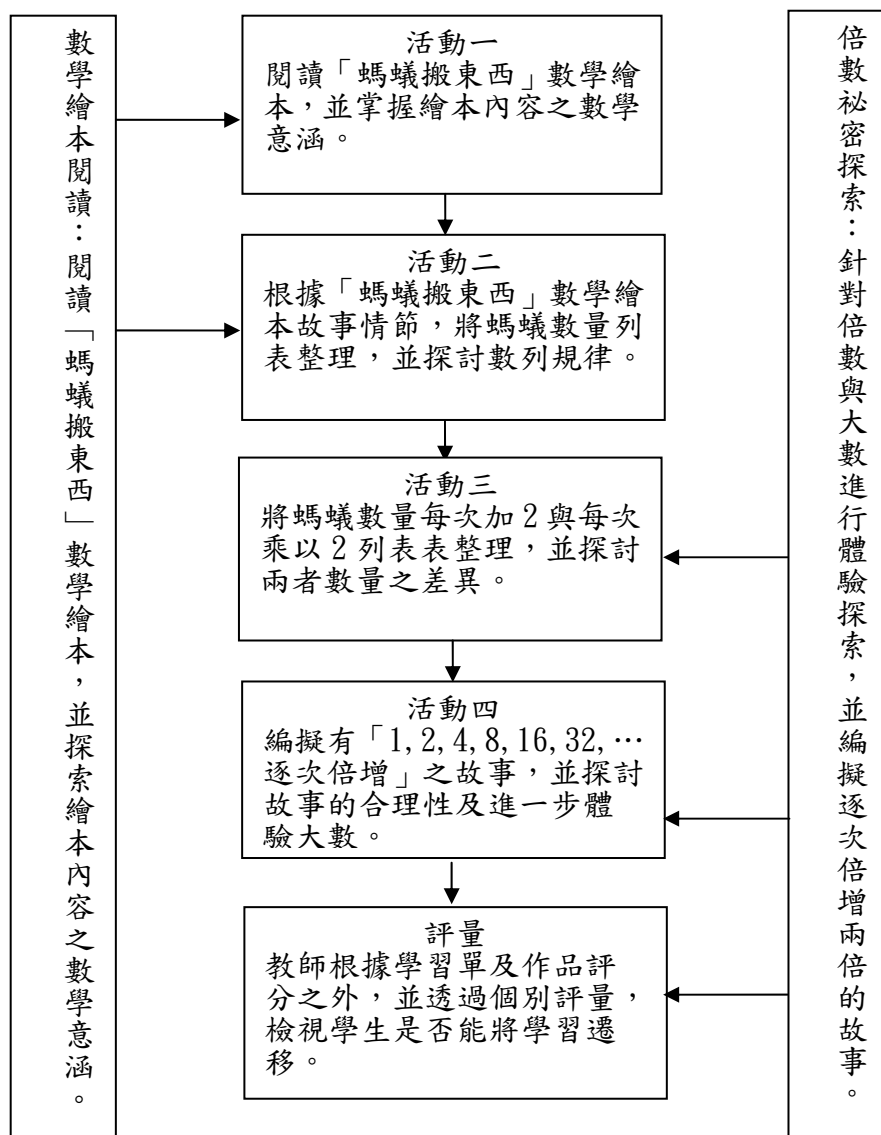
五、教學節數：四節課，160分鐘。

六、評量節數：一節課，40分鐘。

七、教學活動設計架構

本教學活動分為五個活動來進行。活動一：閱讀「螞蟻搬東西」數學繪本，並掌握繪本內容之數學意涵。活動二：根據「螞蟻搬東西」數學繪本故事情節，將螞蟻數量列表整理，並探討數列規律。活動三：將螞蟻數量每次加 2 與每次乘以 2 列表表整理，並探討兩者數量之差異。活動四：編擬有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事，並探討故事的合理性及進一步體驗大數。評量方面：本活動之評量以個別評量為主，教師根據學習單及作品評分之外，並透過個別評量，檢視學生是否能將學習遷移。設計架構如下：

倍數與大數初體驗－數學繪本之教學運用



圖一 《倍數與大數初體驗－數學繪本之教學運用》設計架構

八、教學活動

活動一：閱讀「螞蟻搬東西」數學繪本，並掌握繪本內容之數學意涵。

◆教師：現在請一人拿取一本「螞蟻搬東西」數學繪本，自行閱讀。

◆學生：學生自行閱讀數學繪本內容。

（註：本校有購買 30 本「螞蟻搬東西」，因此，學生可每人領取一本，若是學校沒有購買

那麼多本，可以由教師導讀。)

- ◆教師：「螞蟻搬東西」是一本很有趣的數學繪本，我們來複習一下故事內容。
- ◆學生：隨著故事情節說出螞蟻的數量，1 隻螞蟻搬走麵包屑，2 隻螞蟻搬走葡萄乾，4 隻螞蟻搬走洋芋片，8 隻螞蟻搬走培根片，16 隻螞蟻搬走水煮蛋，32 隻螞蟻搬走雞腿雞翅，64 隻螞蟻搬走中國菜，128 隻螞蟻搬走乳酪，256 隻螞蟻搬不動蛋糕，再找 256 隻螞蟻湊成 512 隻螞蟻搬走蛋糕。
- ◆教師：請問，故事中螞蟻數的數量由 1, 2, 4, 8, …256, 512，每次變化前後，兩個數量之間有什麼共同的特色？
- ◆學生可能的說法如下：螞蟻數量每次都是前一次的兩倍。

活動二：根據「螞蟻搬東西」故事情節，將螞蟻數量列表整理，並探討數列規律。

- ◆教師：五人一組，根據「螞蟻搬東西」數學繪本故事情節，將螞蟻數量列表整理，並將所發現的數列規律寫在白板紙上，上台發表。
- ◆學生可能的說法如下：

次別	螞蟻數量	規律一	規律二	規律三	規律四
第 1 次	1	1	1	1	1
第 2 次	2	1+1	1×2	2	2 的 1 次方
第 3 次	4	2+2	2×2	2×2	2 的 2 次方
第 4 次	8	4+4	4×2	2×2×2	2 的 3 次方
第 5 次	16	8+8	8×2	2×2×2×2	2 的 4 次方
第 6 次	32	16+16	16×2	2×2×2×2×2	2 的 5 次方
第 7 次	64	32+32	32×2	2×2×2×2×2×2	2 的 6 次方
第 8 次	128	64+64	64×2	2×2×2×2×2×2×2	2 的 7 次方
第 9 次	256	128+128	128×2	2×2×2×2×2×2×2×2	2 的 8 次方
第 10 次	512	256+256	256×2	2×2×2×2×2×2×2×2×2	2 的 9 次方

活動三：將螞蟻數量每次加 2 與每次乘以 2 列表整理，並探討兩者數量之差異。

- ◆教師：有兩隊螞蟻，剛開始都只有一隻螞蟻，甲隊螞蟻數量增加方式是每次增加 2 隻，乙隊螞蟻數量增加方式是每次乘以 2。如下表：

次別	螞蟻數量 (甲：每次加 2)	螞蟻數量 (乙：每次乘以 2)	猜想與心得
第 1 次	1	1	猜猜看： ◎到第 20 次，甲和乙螞蟻數量大約相差多少？ ()
第 2 次	3	2	
第 3 次	5	4	
第 4 次	7	8	
第 5 次			◎到第 30 次，甲和乙螞蟻數量大約相差多少？ ()
第 6 次			
第 7 次			
第 8 次			
第 9 次			
第 10 次			
第 11 次			心得：
第 12 次			
第 13 次			
第 14 次			
第 15 次			
……			
第 30 次			

- ◆教師：請算算看，到第 10 次，甲隊和乙隊螞蟻數量大約相差多少？
- ◆學生可能說法：(1)約 500，(2)493。
- ◆教師：請猜猜看，到第 20 次，甲和乙螞蟻數量大約相差多少？到第 30 次，甲和乙螞蟻數量大約相差多少？
- ◆學生：隨意猜測，並記錄自己的猜測數量。一般來說學生猜測的數量落差會很大，這是正常的。學生可能猜測及心得如下：

學生座號	第 20 次兩隊相差量	第 30 次兩隊相差量	心得
16 號	1500	10000	我算到第 30 個是 536870912，我猜的是 10000。
27 號	1200	50000	我玩完這個遊戲，覺得好神奇呀！我回家一定要把著個遊戲分享給家人聽。
18 號	10000	50000	我覺得這個活動讓我學到數學也可以這樣運用，就好像在變魔術一樣好玩，所以讓我今天非常高興。
7 號	150000	300000	我原本以為才差 300000，結果差好多。
14 號	9724	2145987	我覺得螞蟻搬東西很好玩又有趣。
6 號	5000	5000000	我覺得這次的數學很好玩，因為數字會從小到大，而且是從 1 到 5 億，真是嚇死人了。
25 號	50000	5000000	我一開始以為到第 30 次很少，我算完才發現原來有那麼多，真讓我大開眼界，讓我知道數學那麼有趣。
13 號	150000	10000000	我看到了一個天文數字，如果變成美金，我就是大富翁了。
15 號	50000	10000000	我本來以為我猜的都只差一點點，結果差很多，我很驚訝。
17 號	150000	20000000	每次乘 2 的算法真是太恐怖了，因為它竟然加到 5 億多了。

- ◆教師：請算算看，將下列螞蟻數量每次加 2 與每次乘以 2 的表格填完。
- ◆學生：認真計算，並由老師批改訂正。

- ◆教師：請仔細觀察兩隊螞蟻數量（不需要計算），並紀錄第幾次兩隊螞蟻數量就會相差超過 100、1000、10000、10 萬、100 萬、1000 萬、1 億。
- ◆學生：認真觀察，並標記如下：

次別	螞蟻數量 (甲：每次加 2)	螞蟻數量 (乙：每次乘以 2)	第幾次兩隊相差超過 100、1000、10000、10 萬、 100 萬、1000 萬、1 億。
第 1 次	1	1	
第 2 次	3	2	
第 3 次	5	4	
第 4 次	7	8	
第 5 次	9	16	
第 6 次	11	32	
第 7 次	13	64	
第 8 次	15	128	第 8 次
第 9 次	17	256	
第 10 次	19	512	
第 11 次	21	1024	第 11 次
第 12 次	23	2048	
第 13 次	25	4096	
第 14 次	27	8192	
第 15 次	29	16384	第 15 次
第 16 次	31	32768	
第 17 次	33	65536	
第 18 次	35	131072	第 18 次
第 19 次	37	262144	
第 20 次	39	524288	
第 21 次	41	1048576	第 21 次
第 22 次	43	2097152	
第 23 次	45	4194304	
第 24 次	47	8388608	
第 25 次	49	16777216	第 25 次
第 26 次	51	33554432	
第 27 次	53	67108864	
第 28 次	55	134217728	第 28 次
第 29 次	57	268435456	
第 30 次	59	536870912	

活動四：編擬有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事，並探討故事的合理性及進一步體驗大數。

◆教師：有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」的故事還有很多，請聽老師說故事。

(1)與棋士的故事，<http://zhidao.baidu.com/question/12087775.html>

(2)神秘訪客的故事。

◆學生：凝聽故事，並猜測神秘訪客是魔鬼還是天使？

◆教師：現在請大家發揮創意，各自編擬一個有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事，請大家寫下故事，並畫插圖。

◆學生可能編擬的故事如下：

很久很久以前一位女生生了一個寶寶第一個月長高1公分第二個月長2公分第三個月4公分第四個月8公分第五個月16公分第六個月32公分第七個月64公分第八個月128公分第九個月256公分第十個月512公分第十一月1024公分第十二個月2048公分，哇這個小寶寶竟然有20公尺好長。



後設認知探討：

1. 一般寶寶剛出生約 50 公分，這個特殊寶寶剛出生有多長沒有說明，要說請楚。
2. 寶寶到第一個月長高 1 公分，第二個月長 2 公分，第三個月 4 公分，第四個月 8 公分，……，第十二個月 2048 公分。如果是每個月長高一些，那麼到第十二個月的總身高需加上前 11 個月所長高的數量。大家一起來算算看到底是幾公分？

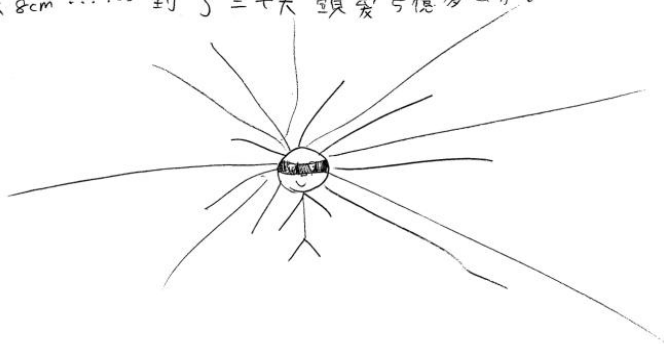
月份	長高(公分)	總身高(公分)	發現
第 1 個月	1	1	(1)發現前 11 個月總身高是 2047 公分，和第 12 月長高的 2048 公分相差 1 公分，總和是 4095 公分，約 40 公尺長。 (2)發現某個月長高的數量，比前面幾個月長高數量總和多 1。
第 2 個月	2	3	
第 3 個月	4	7	
第 4 個月	8	15	
第 5 個月	16	31	
第 6 個月	32	63	
第 7 個月	64	127	
第 8 個月	128	255	
第 9 個月	256	511	
第 10 個月	512	1023	
第 11 個月	1024	2047	
第 12 個月	2048	4095	

3. 可改為寶寶第一個月身高是 1 公分，第二個月身高長到 2 公分，第三個月身高長到 4 公分，第四個月身高長到 8 公分，……，那麼故事就合理了。

評語：頗有量感，到 2048 公分時喊停，把 20 公尺和房子做比較，很棒。

故事

很久很久以前，有一個小孩叫鮑伯，他對媽媽說：「我的頭髮太長了，媽媽說『不要理他』；一天長長 1cm，第二天 2cm，第三天 4cm，第四天 8cm……到了三十天，頭髮 5 億多公分。」



後設認知探討：5 億公分到底有多長？

1. 文字小修為第一天長到 1 公分，第二天長到 2 公分，…即可。
2. 教師：台灣中山高速公路長約 370 公里，5 億公分可繞高速公路幾趟（去回各算一趟）？
學生：500000000 公分 = 5000000 公尺 = 5000 公里， $5000 \div 370 = 13$ （約 13 趟）。

$$5,000,000,000 \text{公分} = 500,000,000 \text{公尺}$$

$$500,000,000 \text{公尺} = 5000 \text{km}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 370 \overline{) 5000} \\ \underline{370} \\ 1300 \\ \underline{1110} \\ 190 \end{array}$$

A=13 圈

第五組

$$500000000 \text{cm} = 5000 \text{km}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 370 \overline{) 5000} \\ \underline{370} \\ 1300 \\ \underline{1110} \\ 190 \end{array}$$

第二組

評語：故事簡潔有趣，圖畫可愛吸引人。

原來的設計	修正後的設計	修正說明及設計省思
任務一：閱讀「螞蟻搬東西」數學繪本，並掌握繪本內容之數學意涵。	活動一：閱讀「螞蟻搬東西」數學繪本，並掌握繪本內容之數學意涵。	沒有修改。「螞蟻搬東西」數學繪本內容，趣味性很夠，孩子很喜歡。
任務二：根據「螞蟻搬東西」數學繪本故事情節，將螞蟻數量列表整理，並探討數列規律。	活動二：根據「螞蟻搬東西」數學繪本故事情節，將螞蟻數量列表整理，並探討數列規律。	沒有修改。本活動採分組討論方式進行，學生的解題記錄相當多元。
任務三：將螞蟻數量每次加 2 與每次乘以 2 列表整理，並探討兩者數量之差異。	活動三：將螞蟻數量每次加 2 與每次乘以 2 列表整理，並探討兩者數量之差異。	雖然審查教授意見和某教學教師均建議加入一欄讓孩子填寫「加 2 與乘以 2」的差異量，但是因為兩量實在差異太大，因此維持原來的設計
任務四：上網查詢有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, ……逐次倍增」之相關故事。	活動四：編擬有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事，並探討故事的合理性。	由於上網查詢資料不易，因此，改為老師說有關「1, 2, 4, 8, 16, 32, …逐次倍增」之故事後，讓學生也來編故事，並和學生一起探討故事的合理性。
評量方面：學生五人一組，將倍數與大數初體驗探索歷程與成果作成 PPT，並上台分享。	評量方面：本活動之評量以個別評量為主，教師根據學習單及作品評分之外，並透過個別評量，檢視學生是否能將學習遷移。	本活動之評量以個別評量為主，教師根據學習單及作品評分之外，並透過個別評量，檢視學生是否能將學習遷移。

二、教師教學的省思

(一) 四年級教學省思

- 故事引人入勝，學生興致很高：「螞蟻搬東西」數學繪本故事的鋪陳很精采，從 1 隻螞蟻搬走麵包屑，2 隻螞蟻搬走葡萄乾，4 隻螞蟻搬走洋芋片，8 隻螞蟻搬走培根片，16 隻螞蟻搬走水煮蛋，32 隻螞蟻搬走雞腿雞翅，64 隻螞蟻搬走中國菜，…，故事引人入勝，學生興致很高，為本活動帶來一個好的開始。
- 體驗倍數大數，學生驚呼連連：活動三的規劃讓學生驚呼連連。教師提出情境「有兩隊螞蟻，剛開始都只有一隻螞蟻，甲隊螞蟻數量增加方式是每次增加 2 隻，乙隊螞蟻數量增加方式是每次乘以 2」後，讓學生先猜測，到第 20 次，兩隊螞蟻相差多少，到第 30 次，兩隊螞蟻相差多少，再列表整理。多數學生猜的數字很小，如下表的 16 號、27 號和 18 號；而 25 號、13 號和 17 號猜的數字雖然比較大，還是離 5 億有點距離，本活動讓學生深深體驗數量逐次加倍的神奇。

學生座號	第 20 次兩隊相差量	第 30 次兩隊相差量	心得
16 號	1500	10000	我算到第 30 個是 536870912，我猜的是 10000。
27 號	1200	50000	我玩完這個遊戲，覺得好神奇呀！我回家一定要把著個遊戲分享給家人聽。

學生座號	第 20 次兩隊相差量	第 30 次兩隊相差量	心得
18 號	10000	50000	我覺得這個活動讓我學到數學也可以這樣運用，就好像在變魔術一樣好玩，所以讓我今天非常高興。
25 號	50000	5000000	我一開始以為到第 30 次很少，我算完才發現原來有那麼多，真讓我大開眼界，讓我知道數學那麼有趣。
13 號	150000	10000000	我看到了一個天文數字，如果變成美金，我就是大富翁了。
17 號	150000	20000000	每次乘 2 的算法真是太恐怖了，因為它竟然加到 5 億多了。

3. 大數體驗驚訝有餘，大數數感掌握不足：體驗大數，驚呼之餘，學生對於大數到底掌握多少，從學生所編擬的故事可以看出多數學生編的故事超級有趣，但是對於大數的掌握並不佳，其實，即使是成人對於 5 億的掌握程度也待斟酌，以「如果一年賺 100 萬，那麼 10 年賺 1000 萬，100 年賺 1 億，500 年才能賺 5 億」來看，也許連大人都很少真正掌握。因此，故事編擬之後，宜透過討論與探討，引導學生進一步體驗大數。以台灣中山高速公路長約 370 公里，5 億公分可繞高速公路幾趟（去回各算一趟）為例，當學生計算 $500000000 \text{ 公分} = 5000000 \text{ 公尺} = 5000 \text{ 公里}$ ， $5000 \div 370 = 13$ （約 13 趟），知道 5 億公分約是高速公路來回 13 趟時，對大數的掌握就具體一些了。當然學生編擬的故事亦不乏佳作，以 4 號小朋友為例，他所編的故事內容是，富翁到第 20 天就不付錢了，而和騙子爭吵起來。因為到第 20 天，騙子付出 $5 \text{ 萬} \times 20 = 100 \text{ 萬}$ ，富翁付出 $524288 + 524287 = 1048575$ ，富翁開始虧錢了，可見編擬此故事的小朋友，數感甚佳。

（二）二年級教學省思

我們嘗試將針對四年級小朋友設計的倍數與大數初體驗活動帶入二年級，只進行活動一到二，並將記錄的數量控制在 1000 以內的數。

我們採用全班共讀的方式進行繪本閱讀，將繪本 PPT 投影在電子白板上，老師與學生一同閱讀並討論繪本中故事情節與螞蟻搬東西的數量變化情形。低年級小朋友對於故事的情節都很感興趣，不僅全心投入故事的情節中，察覺螞蟻的數量變化是每次乘以 2，對於繪本的圖像也很仔細觀察，會對每個情境的圖像確認是否與文字所敘述的數量相符合。

活動一對繪本的閱讀和討論在學生興致勃勃的點算中完成，由於二年級小朋友已經有基本乘法的概念，所以，可以很快的察覺故事情境中螞蟻數量以乘以 2 的方式倍增，而且，小朋友也可以用累加的方式解決大數量的倍增問題。透過這樣記錄故事情節的過程，小朋友對乘法的概念有更深一層的認識。

活動二將螞蟻數量列表整理，並探討數列規律。由於二年級小朋友數概念發展的數量在 1000 以內，所以，我們將作業單改為記錄到 9 次。並且討論數列的規律形式也只限於每次乘以 2 和累加的形式 $(a+a)$ 。

在活動一的情節紀錄中，有小朋友想要算算看，到底總共有幾隻螞蟻排隊搬東西了，於是，除了記錄每次搬東西的螞蟻（1、2、4、8、16、32、64……）以外，又記錄了累計的數量（1、3、7、15、31、63、……），遂發現第一次來 1 隻螞蟻、第二次來 2 隻螞蟻，一、二次累計有 3 隻螞蟻，而第三次來的螞蟻除了是第二次乘以 2 以外，也可以看做是一、二次累計的 3 隻再加 1 隻；第四次出現的螞蟻除了可以看做是第三次乘以 2，也可以看做是一、二、三次累計的 7 隻再加 1 隻；……。小朋友的觀察與思維能力常常讓我們感到驚奇呢！

三、教學實施的建議

本活動設計是配合四年級「認識億、兆大數」之單元設計的，學習對象以四年級為主，若是其他年級教師有意引導學生進行本活動之教學，建議如下：(1) 二、三年級只要進行活動一到二即可。(2) 雖然五、六年級已學過「億、兆大數」，但是對於倍數與大數的深度體驗應該不多，因此，也可以透過本活動引導學生再次體驗倍數與大數的威力。