

開放試題設計與解題分析

摩天輪探索

高雄市博愛國小 洪雪芬

一、評量目標與說明

「摩天輪探索」主要是藉由生活數學引入，期望學生能透過嘗試錯誤，發現規律以解決問題，在學生解題之後，則運用觀摩、討論、修正錯誤等歷程，來深化學生的數學學習。評量目標如下：

N-3-18	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。
C-R-01	能察覺生活中與數學相關的情境。(察覺)
C-T-03	能把情境中與數學相關的資料資訊化。(轉化)
C-C-06	能用一般語言及數學語言說明解題的過程。(溝通)

本評量問題稍具難度，建議採用分組解題方式進行，並透過同儕正確解題之觀摩與討論，引導學生進行深度之探索與思考。

二、題目內容

摩天輪探索（一）

座號： 姓名：
摩天輪有 12 個車廂，每個車廂最少搭乘 1 人，最多搭乘 4 人，摩天輪轉一圈叫做「一輪」，當你來到摩天輪入口排隊時，摩天輪剛好轉到第一號車廂。
【情境一】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。請問： 1. 你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？ 2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。
【情境二】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。
【情境三】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？

摩天輪探索 (二)

座號： 姓名：

摩天輪有 12 個車廂，每個車廂最少搭乘 1 人，最多搭乘 4 人，摩天輪轉一圈叫做「一輪」，當你來到摩天輪入口排隊時，摩天輪剛好轉到第一號車廂。

【深度探索】

請列表探索，當你來到摩天輪入口排隊時，如果你排隊的位置是排在第 1 個、第 2 個、…、第 15 個或第 16 個時，你可以搭到「哪幾號」車廂？

排隊位置	可搭乘車廂編號
第 1 個位置	
第 2 個位置	
第 3 個位置	
第 4 個位置	
第 5 個位置	
第 6 個位置	
第 7 個位置	
第 8 個位置	
第 9 個位置	
第 10 個位置	
第 11 個位置	
第 12 個位置	
第 13 個位置	
第 14 個位置	
第 15 個位置	
第 16 個位置	

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

三、實施方式與學生解題分析

由於「摩天輪探索」題目屬於非例行性的問題，因此，採用分組解題方式來進行，第一次解題之後，先透過同儕正確解題之觀摩與討論，來指導學生深入探索解題之正確與否及如何說明理由；解題觀摩與討論之後，再做第二次解題。

(一) 情境一之學生解題分析

1. 情境一之兩次解題分析

關於情境一之解題，第一次解題之後，有 4 組答案正確，2 組答案錯誤；第二次解題，則 6 組學生均能正確解題與說理。學生解題分析如下：

情境一	第一次解題	第二次解題
第 1 組	答案正確，有說明理由	答案正確，有說明理由
第 2 組	答案錯誤，沒說明理由	答案正確，有說明理由
第 3 組	答案正確，有說明理由	答案正確，有說明理由
第 4 組	答案正確，有說明理由	答案正確，有說明理由
第 5 組	答案錯誤，沒說明理由	答案正確，有說明理由
第 6 組	答案正確，有說明理由	答案正確，有說明理由

2. 同儕正確解題觀摩與討論

由於第一次解題結果，發現第 2、5 組學生尚無法正確解題與說明理由，因此採用問題討論與同儕正確解題觀摩，來指導學生解題與如何撰寫解題之理由。

【問題討論 1】要如何說明能不能搭到「第 9 號」車廂？

學生說法如下：

- (1) 直接在 9 個車廂填上人數，慢慢調整到可以坐上第 9 號車廂。(第 3, 6 組)
- (2) 每個車廂坐 2 人，不行；改成 3 人來思考，也不行；再改成前 8 個車廂坐 2 人，第 9 個車廂坐 3 人。(如第 4 組)
- (3) 因為最快可搭到第 5 車廂，最慢可坐到第 19 號車廂，也就是第 2 輪又 7 號，所以可以坐到第 9 號。(如第 1 組)

同儕正確解題觀摩

第 3 組	第 6 組
<p>【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。</p> <p>1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？</p> <p>2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。</p> <p>A: 1. 10 號 2. 2 輪 7 號</p> <p>12 可以, 理由 →</p> <p>理由</p> <p>① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8 ⑥ 9 ⑦ 10 ⑧ 11 ⑨ 12 ⑩ 13 ⑪ 14 ⑫ 15 ⑬ 16 ⑭ 17 ⑮ 18 ⑯ 19</p>	<p>【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。</p> <p>1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？</p> <p>2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。</p> <p>$4 \times 1 = 4$ $4 \times 5 = 20$ $19 - 12 = 7$</p> <p>$4 \times 2 = 8$ A: ① 最快第 5 號車廂 12 62</p> <p>$4 \times 3 = 12$ ② 最慢第 2 輪第 7 號箱 22 74</p> <p>$4 \times 4 = 16$ ③ 可以 32 82</p> <p>42 91</p> <p>52</p>
第 4 組	第 1 組
<p>【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。</p> <p>1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？</p> <p>2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。</p> <p>$19 \div 4 = 4 \dots 3$ $19 \div 12 = 1 \dots 7$ (號) $2 \times 9 = 18$ $2 \times 8 = 16$</p> <p>$4 + 1 = 5 \dots$ 快 $1 + 1 = 2$ (輪) $19 > 18$ (x) $19 - 16 = 3 \dots$ ④</p> <p>= 2 輪 7 號</p> <p>$19 \div 3 = 6 \dots 1$ $8 + 1 = 9$</p> <p>$6 + 1 = 7$ $9 = 9$</p> <p>7 / 9 A: 可以</p> <p>A: 5 號 ② 第 2 輪 7 號</p>	<p>【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。</p> <p>A1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？</p> <p>B2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。</p> <p>A: ① 第 5 號車廂 ② 第 19 號車廂 ③ 2 輪 7 號。</p> <p>B: ① 能 ② 最快是第 5 號車廂、最慢是第 19 號車廂，所以可以搭到。</p>

【問題討論 2】第 1 組提到，最快可坐到第 5 車廂，最慢可坐到第 2 輪第 7 號，就可以坐到第 9 號，為什麼？

教師引導：在黑板上，畫 19 個格子。

1. 每個格子放一個磁鐵代表一個人，顯示可以坐到第 2 輪第 7 號；
2. 將第 2 輪第 7 號磁鐵移到第 1 車廂，顯示可以坐到第 2 輪第 6 號；
3. 將第 2 輪第 6 號磁鐵移到第 1 車廂，顯示可以坐到第 2 輪第 5 號；
4. 將第 2 輪第 5 號磁鐵移到第 1 車廂，顯示可以坐到第 2 輪第 4 號；
5. 第 1 車滿了，將第 2 輪第 4 號磁鐵移到第 2 車廂，顯示可以坐到第 2 輪第 3 號；以此類推。如下表，結果發現，當「最快可坐到第 5 車廂，最慢可坐到第 2 輪第 7 號」時，介於「第 5 車廂和第 2 輪第 7 號車廂」之間的车廂，都可以坐到。歷程如下圖：

車廂	第一輪												第二輪						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
人	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人	4	4	4	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. 解題與說理之修正(第 2, 5 組)

經過討論分享後再做第二次解題，結果顯示學生都能正確說明理由。

第 2 組 解題說理修正

【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。

1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？

2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。

$19 \div 4 = 4 \dots 3$
 $19 \div 1 = 19$

A. 第 5 車廂
 第 2 輪第 7 號車廂可以

第 5 組 解題說理修正

【情境一】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 19 個位置。

1. 請問你最快可以搭上「第幾號」車廂？最慢會搭上「第幾輪第幾號」車廂？

2. 你能不能搭到「第 9 號」車廂，請說明你的想法與作法。

1. 5 號車廂，第 7 號車廂
 $1. 19 \div 4 = 4 \dots 3$ $4 + 1 = 5$ 2. $19 \div 1 = 19$ 因為只有 2 個車廂，所以 19 就是第 2 輪由

2. 能
 因為從 5 到第 7 輪之間有第 9 號車廂

(二) 情境二、三之學生解題分析

1. 情境二、三之兩次解題分析

關於情境二、三之解題，第一次解題之後，只有第 4 組解題與說理都正確；第 1, 5 組答案正確，但不會說理；第 3, 6 組情境三答案錯誤；第 2 組情境二、三答案錯誤。第二次解題，則 6 組學生均能正確解題與說理。學生解題分析如下：

情境二、三	第一次解題	第二次解題
第 1 組	答案正確，沒說明理由。	答案正確，有說明理由。
第 2 組	情境二、三答案錯誤，沒說明理由。	答案正確，有說明理由。
第 3 組	情境二答案正確，有說明理由。 情境三答案錯誤，說理錯誤。	答案正確，有說明理由。
第 4 組	答案正確，有說明理由。	答案正確，有說明理由。
第 5 組	答案正確，沒說明理由。	答案正確，有說明理由。
第 6 組	情境二答案正確，有說明理由。 情境三答案錯誤，說理錯誤。	答案正確，有說明理由。

2. 同儕正確解題觀摩與討論

由於情境二、三之解題與說理正確率較低，因此，還是採用問題討論與同儕正確解題觀摩，來指導學生解題與如何撰寫解題之理由。

【問題討論 1】要如何說明排在第 12 個位置，一定搭不到第 1, 2 號車廂？

學生說法如下：

- (1) $12 \div 4 = 3$, $12 \div 1 = 12$ ，最快可搭到第 3 車廂，最慢可坐到第 12 號車廂，可以搭到第 3 到第 12 車廂的每一個車廂，所以一定搭不到第 1, 2 號車廂。
- (2) 可以像上一題一樣，用磁鐵來說明。

車廂	第一輪											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
人 2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
人 3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
人 4	4	1	1	1	1	1	1	1	1			
人 4	4	2	1	1	1	1	1	1				
人 4	4	3	1	1	1	1	1					
人 4	4	4	1	1	1	1						
人 4	4	4	2	1	1							
人 4	4	4	3	1								
人 4	4	4	4									

【問題討論 2】 要如何說明排在第 13 個位置，一定搭不到第 2, 3 號車廂？

學生說法如下： $13 \div 4 = 3 \dots 1$ ， $13 \div 1 = 13$ ，因為最快可搭到第 4 車廂，最慢可坐到第二輪第 1 號車廂，可以搭到第 4 車廂到第第二輪第 1 號車廂之間的每一個車廂，所以一定搭不到第 2, 3 號車廂。

同儕正確解題觀摩

【情境二】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。

$12 \div 1 = 12 \dots \text{慢}$
 $12 \div 4 = 3 \dots \text{快}$
 $1, 2$ 坐不到
 A = 第 1, 2 號

【情境三】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？

$13 \div 12 = 1 \dots 1 \dots \text{慢}$
 $13 \div 4 = 3 \dots 1$
 $3 + 1 = 4 \dots \text{快}$
 $2, 3$ 坐不到
 A = 第 2, 3 號

3. 解題與說理之修正

經過討論分享再做第二次解題，結果顯示 6 組學生均能正確解題，在說理方面，第 3, 5, 6 組表現不錯，第 1, 2 組則只寫出算式和答案，未能清楚說理。

第 3, 5, 6 組之解題與說理修正

<p>第 3 組 情境三答案錯誤</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>【情境三】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？</p> <p>A: 2, 3 號，因為： 如果最多每個車廂搭四人： $13 \div 4 = 3 \dots 1$，自己搭一個車廂。 $3 + 1 = 4$ 最快也只能搭到 4 號車廂。</p> </div>	<p>第 6 組情境三答案錯誤</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>【情境三】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？</p> <p>$13 \div 4 = 3 \dots *$ $3 + 1 = 2$ A: 1, 2 號</p> </div>
<p>第 3 組情境三答案修正</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>【情境三】 當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？</p> <p>A: 2, 3 號，因為： 如果最多每個車廂搭四人：$13 \div 4 = 3 \dots 1$ 自己搭一個車廂。 不過也可以搭到第 2 輪的 1 號，因為 如果每個車廂搭 1 個人：$13 - 12 \times 1 = 1 \leftarrow$ 搭到 第 2 輪的 1 號車廂。</p> </div>	

第 6 組情境三答案修正

【情境三】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？

$13 \div 4 = 3 \dots 1$
因為於 1，所以 3 不可能

$13 \div 12 = 1 \dots 1$
因為於 1，所以 1 也不可能

$A: 2, 3$ 號

一次
< 假設每次都是最多的人進去

第 5 組 說理修正

【情境二】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。

第十一個位子: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. (沒有 1, 2)

$A: 1, 2$ 號車廂

【情境三】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？

第十三個位子: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 第二輪: 1 (沒有 2, 3)

$A: 2, 3$ 號車廂

4. 解題與說理之個別指導與修正

由於第 1, 2 組則只寫出算式和答案，未能清楚說理。因此教師採取個別指導方式，引導學生如何將解題緣由說清楚。

教師：你們能清楚列出算式 $12 \div 4 = 3$ ， $12 \div 1 = 12$ 很棒，但是從這個算式怎麼會知道搭不到第 1, 2 號車廂呢？

學生：因為最快可搭到第 3 車廂，最慢可搭到第 12 號車廂，所以搭不到第 1, 2 號車廂。

教師：請說說看到底可以搭到哪些車廂？

學生：可以搭到第 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 車廂。

教師：情境三最快可搭到第 4 車廂，最慢可搭到第二輪第 1 號車廂，表示可以搭到哪些車廂？

學生：可以搭到第 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 和第二輪第 1 車廂。

教師：說得很好，請把你們剛剛說的補寫上去。

<p style="text-align: center;">第 2 組 情境二答案錯誤</p> <p>【情境二】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。</p> <p style="text-align: center;">1, 2, 5, 7, 11 號搭不到</p>	<p style="text-align: center;">第 2 組 情境二答案修正</p> <p>【情境二】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。</p> <p style="text-align: center;"> $12 \div 4 = 3$ (快) $12 \div 1 = 12$ (慢) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 A: 第 2 號一定搭不到 </p>
<p style="text-align: center;">第 2 組 情境三答案錯誤</p> <p>【情境三】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？</p> <p style="text-align: center;">1, 2, 3 號</p>	<p style="text-align: center;">第 2 組 情境三答案修正</p> <p>【情境三】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。 請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？</p> <p style="text-align: center;"> $13 \div 4 = 3 \dots 1$ $13 \div 1 = 13$ (慢) $3 + 1 = 4$ (快) $4 \times 3 = 12$ (第 2 輪第 12 號) A: 3 號和 2 號搭不到 </p>

第 1 組 說理修正

【情境二】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 12 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？請說明你的想法與作法。

$12 \div 4 = 3$ 快
 $12 \div 1 = 12$ 慢

可坐到：3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

A: ①第 12 號車廂一定搭不到 ② 3-12 可坐到, 1-2 坐不到

【情境三】當你來到摩天輪入口排隊時，你排在第 13 個位置。
請問「哪幾號」車廂，你一定搭不到？

$13 \div 4 = 3 \dots 1$ $3 + 1 = 4$ 快
 $13 \div 1 = 13$ 慢

可坐到：4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 - 1

A: 第 2-3 號一定搭不到。

(三)「深度探索」之學生解題分析

1. 「深度探索」之兩次解題分析

關於「深度探索」之解題，第一次解題之後，有 3 組學生答案正確，有 3 組學生答案錯誤，經過討論分享之後，再做第二次解題，結果顯示 6 組學生均能正確解題，在發現與心得的撰寫方面，有 5 組是 OK 的，有 1 組學生所說明的理由是錯誤的。學生解題分析如下：

深度探索	第一次解題	第二次解題	發現與心得
第 1 組	答案正確	答案正確	簡略
第 2 組	答案錯誤	答案正確	簡略
第 3 組	答案錯誤	答案正確	說理錯誤
第 4 組	答案正確	答案正確	有數學味
第 5 組	答案正確	答案正確	呈現規律
第 6 組	答案錯誤	答案正確	有數學味

2. 「深度探索」之解題類型分析

正確解題	排隊位置	第 1 輪	可搭乘車廂編號	第 2 輪	(第 1, 4, 5 組) 學生能看出規律，也能將第 13, 14, 15, 16 號車廂，表示為第二輪第 1, 2, 3, 4 號車廂。
	第 1 個位置	1			
第 2 個位置	1-2			第 1 輪	
第 3 個位置	1-2-3			第 1 輪	
第 4 個位置	1-2-3-4			第 1 輪	
第 5 個位置	2-3-4-5			第 1 輪	
第 6 個位置	2-3-4-5-6			第 1 輪	
第 7 個位置	2-3-4-5-6-7			第 1 輪	
第 8 個位置	2-3-4-5-6-7-8			第 1 輪	
第 9 個位置	3-4-5-6-7-8-9			第 1 輪	
第 10 個位置	3-4-5-6-7-8-9-10			第 1 輪	
第 11 個位置	3-4-5-6-7-8-9-10-11			第 1 輪	
第 12 個位置	3-4-5-6-7-8-9-10-11-12			第 1 輪	
第 13 個位置	4-5-6-7-8-9-10-11-12-1			第 1 輪 & 第 2 輪	
第 14 個位置	4-5-6-7-8-9-10-11-12-1-2			第 1 輪 & 第 2 輪	
第 15 個位置	4-5-6-7-8-9-10-11-12-1-2-3			第 1 輪 & 第 2 輪	
第 16 個位置	4-5-6-7-8-9-10-11-12-1-2-3-4			第 1 輪 & 第 2 輪	

錯誤解題	<table border="1"> <thead> <tr> <th>排隊位置</th> <th>可搭乘車廂編號</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>第 1 個位置</td><td>1</td></tr> <tr><td>第 2 個位置</td><td>1, 2</td></tr> <tr><td>第 3 個位置</td><td>1, 2, 3</td></tr> <tr><td>第 4 個位置</td><td>1, 2, 3, 4</td></tr> <tr><td>第 5 個位置</td><td>2, 3, 4, 5</td></tr> <tr><td>第 6 個位置</td><td>2, 3, 4, 5, 6</td></tr> <tr><td>第 7 個位置</td><td>2, 3, 4, 5, 6, 7</td></tr> <tr><td>第 8 個位置</td><td>2, 3, 4, 5, 6, 7, 8</td></tr> <tr><td>第 9 個位置</td><td>3, 4, 5, 6, 7, 8, 9</td></tr> <tr><td>第 10 個位置</td><td>3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10</td></tr> <tr><td>第 11 個位置</td><td>3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11</td></tr> <tr><td>第 12 個位置</td><td>3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12</td></tr> <tr><td>第 13 個位置</td><td>4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13</td></tr> <tr><td>第 14 個位置</td><td>4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14</td></tr> <tr><td>第 15 個位置</td><td>4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15</td></tr> <tr><td>第 16 個位置</td><td>4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16</td></tr> </tbody> </table>	排隊位置	可搭乘車廂編號	第 1 個位置	1	第 2 個位置	1, 2	第 3 個位置	1, 2, 3	第 4 個位置	1, 2, 3, 4	第 5 個位置	2, 3, 4, 5	第 6 個位置	2, 3, 4, 5, 6	第 7 個位置	2, 3, 4, 5, 6, 7	第 8 個位置	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	第 9 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	第 10 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	第 11 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	第 12 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	第 13 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	第 14 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	第 15 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	第 16 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	(第 3, 6 組) 學生能看出規律, 但是未能將第 13, 14, 15, 16 號車廂, 表示為第二輪第 1, 2, 3, 4 號車廂
	排隊位置	可搭乘車廂編號																																		
	第 1 個位置	1																																		
	第 2 個位置	1, 2																																		
	第 3 個位置	1, 2, 3																																		
	第 4 個位置	1, 2, 3, 4																																		
	第 5 個位置	2, 3, 4, 5																																		
	第 6 個位置	2, 3, 4, 5, 6																																		
	第 7 個位置	2, 3, 4, 5, 6, 7																																		
	第 8 個位置	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8																																		
	第 9 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9																																		
	第 10 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10																																		
	第 11 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11																																		
	第 12 個位置	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12																																		
	第 13 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13																																		
	第 14 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14																																		
第 15 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15																																			
第 16 個位置	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16																																			
錯誤解題	<table border="1"> <thead> <tr> <th>排隊位置</th> <th>可搭乘車廂編號</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>第 1 個位置</td><td>① ✓</td></tr> <tr><td>第 2 個位置</td><td>① ② ✓</td></tr> <tr><td>第 3 個位置</td><td>① ② ③ ✓</td></tr> <tr><td>第 4 個位置</td><td>① ② ③ ④ ✓</td></tr> <tr><td>第 5 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤</td></tr> <tr><td>第 6 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥</td></tr> <tr><td>第 7 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦</td></tr> <tr><td>第 8 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧</td></tr> <tr><td>第 9 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨</td></tr> <tr><td>第 10 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩</td></tr> <tr><td>第 11 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪</td></tr> <tr><td>第 12 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫</td></tr> <tr><td>第 13 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬</td></tr> <tr><td>第 14 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭</td></tr> <tr><td>第 15 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮</td></tr> <tr><td>第 16 個位置</td><td>① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯</td></tr> </tbody> </table> <p>經由上述的探索, 請說說你的發現和心得。</p> <p>有規律!!!</p>	排隊位置	可搭乘車廂編號	第 1 個位置	① ✓	第 2 個位置	① ② ✓	第 3 個位置	① ② ③ ✓	第 4 個位置	① ② ③ ④ ✓	第 5 個位置	① ② ③ ④ ⑤	第 6 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥	第 7 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦	第 8 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧	第 9 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	第 10 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	第 11 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪	第 12 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫	第 13 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬	第 14 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭	第 15 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮	第 16 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯	(第 2 組) 學生在寫完第 1, 2, 3, 4 個位置可搭乘車廂編號之後, 就以為找到規律了, 然後以此類推, 一路依序寫下去, 結果未能找出正確的規律。
	排隊位置	可搭乘車廂編號																																		
	第 1 個位置	① ✓																																		
	第 2 個位置	① ② ✓																																		
	第 3 個位置	① ② ③ ✓																																		
	第 4 個位置	① ② ③ ④ ✓																																		
	第 5 個位置	① ② ③ ④ ⑤																																		
	第 6 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥																																		
	第 7 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦																																		
	第 8 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧																																		
	第 9 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨																																		
	第 10 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩																																		
	第 11 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪																																		
	第 12 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫																																		
	第 13 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬																																		
	第 14 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭																																		
第 15 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮																																			
第 16 個位置	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯																																			

經過討論分享之後, 再做第二次解題, 六組學生都能正確解題。

3. 學生之發現與心得分析

在發現與心得的撰寫方面, 第 4, 6 組的發現與心得頗具數學味, 第 5 組還寫出第 17-21 個位置可搭乘的車廂來顯示真的有找到規律, 第 1, 2 組的發現與心得稍嫌簡略, 第 3 組學生所說明的理由則是錯誤的。各組的發現與心得如下:

第 4 組	<p>經由上述的探索, 請說說你的發現和心得。</p> <p>我發現當我們排在第幾號, 就會坐到第幾號, 但如果我排的位置超過 12 號, 要將號碼減掉 12。每 4 個車廂一個環節, 當我的所在位置超過 4 的倍數, 最快的車廂要往後退 1 個。</p>
-------	--

第6組

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

只要是4的倍數的下一個數，就要在上一個數的第一個數加一，如：在第④個位置④2,3,4，而下一個位置的可能是⑤編號等於⑤3,4,5。

我覺得數學只要發現規律，就很好找出答案了！

第5組

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。


同學教我很多規律，令我收穫良多。數學只要發現規律，就會很好算。

第17個位置	1, 2, 3, 4, 5	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
18	1, 2, 3, 4, 5, 6	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
19	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
20	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
21	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

第1組

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

經過這次的探索，讓我們更了解關於數學的一些規律。



第2組

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

經過這次的經驗，更讓我們了解了摩天輪的規律。

“粉”有“規律”！！

4. 學生之發現與心得修正 (第3組)

由於第3組在發現與心得中所說明的理由是錯誤的。因此，採用個別問話方式，根據學生的解題思維來引導其修正錯誤。

說理錯誤

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

第1~4(位置)都是每個車廂坐4人;
第5~8(位置)都是每個車廂坐3人.....
不過到了第13個位置,因為 $13-12=1$,
所以京尤會坐到第2趟,因此京尤不一樣了。
而且在第15個位置以後,京尤每一個
車廂都可以搭到了(包含第2趟)!

說理修正

經由上述的探索，請說說你的發現和心得。

第1~4(位置)都是從①開始,到自己的號碼
第5~8(位置)都是從②開始,到自己的號碼
不過到了第13個位置,因為 $13-12=1$,
所以京尤會坐到第2趟,因此京尤不一樣了。
而且在第15個位置以後,京尤每一個
車廂都可以搭到了(包含第2趟)!

(四) 學生個人學習心得賞析

從學生個人學習心得的撰寫看來，開放試題的評量是有意義的，且值得嘗試。
學生個人學習心得舉例如下：

第 單元/學人
我本來覺得摩天輪探索很難,但
是經過整組的討論,其實真的很
簡單,雖然我們第一次寫的太快,
太興奮了!所以一知道了規律就不停
的一直寫下去,真的是太可怕了!之後第
二次討論後,慢慢分析、討論,終於
懂這規律,因之前太粗心了,所以
一直都沒有解,現在慢慢的寫,終
於會了這個摩天輪探索。

解題心路歷程：很難—很簡單—錯誤—了解

我覺得這個單元非常有趣，平常坐摩天輪時都沒有去發現，一開始上這單元時有點讓我一頭霧水，之後我以為我找到規律了，結果聽老師說才知道我找錯了，最後我終於知道，知道規律我覺得非常有趣、好玩。

我覺得摩天輪的探索有一點難，但經過這次的討論，讓我們的知識又多了一些，也讓我們更了解生活上的難題。

解題心路歷程：有點難—討論—了解

第 單元 摩天輪的心得
其實這次摩天輪的單元並沒有很難，只要稍微動一下頭腦，馬上就出來了。經過這次的討論，也讓我們這一組更合作更有默契。雖然有人剛開始不懂，但是經過其他人的解說，他們也都了解了，而且還讓我們了解這個單元的規律。

我覺得合作很重要，如果沒有大家團結合作，也找不到線索。同時也可以增進彼此的耐性 & 學習結合合作的精神。

解題心情：合作很重要

①我覺得2張都很簡單，因為只要一個一個數就可以破解！

第 單元 摩天輪探索的心得：
我發現我在排位置時，會找到了規律，且這種遊戲的方式，能增加我的知識，讓我了解哪個位置可坐到，哪個位置不能坐到。其實在很多的數題裡，都蘊藏著許多規律！

第 單元 摩天輪探索
摩天輪探索的心得：
摩天輪因為是一號接著一號，因此可以讓我們學習週期性的問題，例如：多少人一輪、多少車廂一輪……，且在分工合作中可以探索其中的奧秘，並能體驗到思考數學的趣味，而我還發現到：排在第16個位置以上，就會坐到不同輪，相同號碼的車廂值得大家細細玩味。

解題心情：數學蘊藏規律

四、省思與建議

(一) 學生的解題歷程，印證「人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能及透過學習能利用推論去解決數學問題」的說法。

97 課程綱要指出數學之所以被納入國民教育的基礎課程，重要的原因之一是：數學是人類天賦本能的延伸，人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，並具備形與數的初等直覺；經過文明累積的陶冶與教育，使這些本能得以具體延伸為數學知識，並形成更有力量的思維能力。在數學教育裡，強調每個學生都有權利要求受到良好的數學訓練，並充分認識重要的數學概念及提升厚實的數學能力。學生能力的發展始於流利的基礎運算和推演、對數學概念的理解，然後懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題，以及在不熟悉解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑(教育部, 2008)。本文所提出的開放試題「摩天輪探索」之設計，主要是藉由生活數學引入，期望學生能發揮嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，進而經過觀摩、討論、修正錯誤等歷程，使這些本能得以具體延伸為數學知識。

實施結果，從情境一的解題可以印證「人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能及透過學習能利用推論去解決數學問題」的說法，證據如下：

嘗試錯誤	直接在 9 個車廂填上人數，慢慢調整到可以坐上第 9 號車廂。(如第 3, 6 組)
尋求策略	每個車廂坐 2 人，不行；改成 3 人來思考，也不行；再改成前 8 個車廂坐 2 人，第 9 個車廂坐 3 人。(如第 4 組)
利用推論 解決問題	因為最快可搭到第 5 車廂，最慢可坐到第 19 號車廂，也就是第 2 輪又 7 號，所以可以坐到第 9 號。(如第 1 組)

(二) 引導學生解決困難度稍高的非例行性問題，解題前之心理建設是必需的。

關於「深度探索」之解題，在施測之前，筆者一直很擔心題目太難，造成學生負荷過大，因此在發下試卷之後，馬上先給學生來個心理建設：

只要認真細心的完成前面幾個答案，就會發現規律，不會很難的。

施測結果出乎筆者意料之外，第 1, 4, 5 組學生解答完全正確；第 3, 6 組學生能看出規律，只是未能將第 13, 14, 15, 16 號車廂寫成第二輪第 1, 2, 3, 4 號車廂；比較有趣的是第 2 組學生在寫完第 1, 2, 3, 4 個位置可搭乘車廂編號之後，就很高興的以為找到規律了（參見 p9 寫著「有規律」，還畫個笑臉），然後以此類推，一路依序寫下去，結果未能找出正確的規律。當然，經過觀摩與討論，這一組學生也能看到規律了。

（三）當學生解題遇到困難，教師適時介入是很重要的。

針對第 1 組的推論「因為最快可搭到第 5 車廂，最慢可坐到第 2 輪第 7 號，所以可以坐到第 9 號。」多數學生無法理解。

此時，教師適時介入是很重要的，教師的引導策略是在黑板上，畫 19 個格子，每個格子放一個磁鐵代表一個人，顯示可以坐到第 2 輪第 7 號；然後將第 2 輪第 7 號磁鐵移到第 1 車廂，顯示可以坐到第 2 輪第 6 號；以此類推，引導學生發現當「最快可坐到第 5 車廂，最慢可坐到第 2 輪第 7 號」時，介於「第 5 車廂和第 2 輪第 7 號車廂」之間的车廂，都可以坐到。

而此推論剛好是情境二、三之解題金鑰，因此，學生可以很清楚的說出「排在第 12 個位置，最快可搭到第 3 車廂，最慢可坐到第 12 號車廂，可以搭到第 3 到第 12 車廂的每一個車廂，但是一定搭不到第 1, 2 號車廂。」

（四）學生能從解題活動中，看見數學，所以開放試題的設計與實施是有意義，且值得嘗試的。

從學生的學習心得，發現學生真的能從解題活動中，看見數學；學生分組的發現與心得如下：第 1, 2 組的發現與心得雖然稍嫌簡略，但是有看到規律，第 5 組甚至還寫出第 17-21 個位置可搭乘的車廂，來顯示真的有找到規律，而第 4, 6 組的發現與心得頗具數學味，真的相當難能可貴。學生個人的學習心得如下：有的學生的學習心路歷程是「很難—很簡單—錯誤—了解」，有的則是「不懂—討論—了解」；在解題心情方面則有「合作很重要」、「數學蘊藏規律」等，由此可見，開放試題的設計與實施是有意義的，且值得嘗試。

(五)教師要能善用科技處理學生評量資料，才会有動力持續實施開放試題之評量及解題分析。

在實施開放試題之評量及解題分析的歷程中，學生解題資料的處理對教師而言負擔最重，通常教師在學生第一次解題之後，需要將學生解題資料掃描，以便分析，然而一張一張掃描學生解題資料，相當費時，若沒及時學生解題資料掃描，活動就無法順利進行。

筆者在學生第一次解題之後，運用影印機將所有學生的解題資料印成 pdf 檔備用，如此一來，使得擷取學生解題資料，變得相當容易；也使得同儕正確解題觀摩及錯誤解題之討論，進行得非常順利。至於學生第二次解題資料的處理，由於解題資料較少，因此，改用相機拍照方式來處理。總之，教師要能善用科技處理學生評量資料，才会有動力持續實施開放試題之評量及解題分析。